FONDO PIZZOFALCONE

22 E 21

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio 7

Palchetto

Num.° d' ordine e 4

24644

NAZIONALE
B. Prov.
11
327
NAPOLI
VITT. EM. III

131 D 10

Pr. Slov. II 32 f 1-3

SBN
609369

TRAITÉ
DES LIGNES
DU
PREMIER GENRE

Expliquées par une Methode nouvelle
& facile.

Par M. OZANAM, Professeur en Mathematique.

BIBLIOTECA PROVINCIALE
NAPOLI
NAPOLI

A PARIS,
Chez ESTIENNE MICHALLET, ruë S. Jacques,
à l'Image S. Paul.

M. DC. LXXXVII.
AVEC PERMISSION.

SERVICIO TOPOGRAFICO

AU LECTEUR.

CE Traité ayant été composé principalement en faveur de ceux qui desirent sçavoir resoudre les Equations de plus de deux dimensions par le moyen des Sections Coniques, dont ils doivent par consequent connoître les proprietez; je n'ay pas crû être obligé de le rendre plus ample, parce qu'ils y trouveront tout ce qui leur sera necessaire pour faire une juste application des Sections Coniques à l'Algebre, qui demeure tres-imparfaite dans celuy qui n'a pas au moins la connoissance des Lignes du premier Genre. *Ceux qui en souhaiteront davantage, pourront voir le grand Traité des Sections Coniques de M. De la Hire, pour satisfaire pleinement leur curiosité. Si ce Traité a le bonheur de vous plaire,*

Mon cher Lecteur, *je vous donnerai enſuite un Traité des* Lieux Geometriques, *que je prétends expliquer ſi clairement, qu'il pourra être facilement entendu par les moins habiles. Cependant pour finir agréablement ce Livre, nous ajoûterons à la fin la Solution de quatre Problemes curieux, qui eſt de nôtre invention, & que je n'ay communiquée qu'à peu de perſonnes.*

TRAITE'
DES LIGNES
DU PREMIER GENRE.

LEs lignes du premier Genre ſont des lignes courbes, dans leſquelles tirant des lignes paralleles entre elles, leurs Quarrez ſont à de certains Rectangles correſpondans en raiſon donnée, telles que ſont les *Sections Coniques*, ainſi appellées, parce qu'elles repreſentent les Sections d'un *Cone* & d'un *Plan*, differemment incliné ſur la baſe de ce Cone.

Cette differente inclination peut cauſer cinq Sections differentes, ſçavoir le *Triangle*, le *Cercle*, la *Parabole*, l'*Ellipſe*, & l'*Hyperbole*. Et comme le *Triangle* n'entre pas au nombre des lignes du premier genre, & que le *Cercle* eſt aſſez connu, nous parlerons ſeulement des trois dernieres Sections, en les conſiderant premierement hors du Cone, pour les rendre plus faciles à comprendre ; aprés quoy nous demonterons l'origine de ces lignes dans le Cone.

Nous considererons une proprieté, qui soit generale pour ces trois Sections Coniques, pour pouvoir en demontrer toutes les autres proprietez qui leur sont particulieres. Cette proprieté generale sera la comparaison que nous ferons des Rectangles precedens à leurs Quarrez correspondans en cette sorte.

1. 2. & 3. Fig. Que les deux lignes AB, BG, fassent au point B, que nous appellerons *Sommet*, l'angle donné ABG. Supposons que la ligne BG, que nous appellerons *Parametre*, soit d'une grandeur determinée, & que l'autre ligne AB, que nous appellerons *Diametre* à l'égard du Parametre BG, puisse être d'une grandeur finie & infinie.

Supposons encore, que par le point B, il passe la ligne courbe BCE, dont la proprieté soit telle, que si l'on tire en dedans à droit ou à gauche, au Parametre BG, la parallele CD, terminée par le Diametre AB, prolongé quand il en sera besoin, & par la courbe BCE, le Rectangle ADB, soit au Quarré correspondant CD, comme le Diametre AB, à son Parametre BG; & que pareillement si l'on tire au même Parametre BG, une autre parallele EF, le Rectangle AFB, soit à son Quarré correspondant EF, comme le même Diametre AB, à son Parametre BG; & ainsi de toutes les autres paralleles que l'on peut tirer à l'infini au dedans de la courbe BCE.

Toutes ces paralleles CD, EF, seront appellées *Ordonnées* au Diametre AB, que nous appellerons *Axe*, lorsqu'il sera perpendiculaire à ses Ordonnées, c'est-à-dire, lorsque l'Angle ABG sera droit. Ainsi vous voyez que le Diametre d'une ligne courbe est

une ligne droite, qui diviſe en deux également toutes ſes Ordonnées, & qu'un Axe eſt un Diametre perpendiculaire à ſes Ordonnées. *1. 2. & 3. Figures.*

Il eſt évident que lorſque le Diametre AB, ſera au dedans de la courbe BCE, comme dans la *Fig.* 2. cette courbe BCE, renfermera un eſpace, & que le même Diametre AB, en repreſentera la longueur, quand il ſera un Axe plus grand que ſon Parametre BG, & la largeur, quand il ſera moindre.

Il eſt auſſi évident, que lorſque le Diametre AB, ſera au dehors de la courbe BCE, comme dans les *Fig.* 1. 3. cette courbe BCE, s'élargira toûjours à l'infini, & qu'elle ne renfermera jamais un eſpace.

Il ſuit aiſément de cette proprieté generale une autre proprieté, qui eſt auſſi generale, ſçavoir que le Rectangle ADB, eſt à ſon Quarré correſpondant CD, comme le Rectangle AFB, à ſon Quarré correſpondant EF, parce que toutes ces raiſons ſont égales à une même, ſçavoir à celle du Diametre AB, à ſon Parametre BG.

Il ſuit auſſi de cette même proprieté generale, que la courbe BCE, doit paſſer par le Sommet B, & qu'on la peut décrire par une méthode auſſi generale, excepté lorſque le Diametre AB, ſera d'une grandeur infinie, auquel cas il faudra chercher une conſtruction particuliere; ce que nous ferons, en cherchant auparavant une proprieté particuliere pour chacune des trois courbes propoſées BCE, par le moyen d'une Equation, qui exprime la relation des points de la courbe BCE, ſur ſon Diametre AB. Une ſemblable Equation ſe nommera *Equation conſtitutive*.

1. 2. & 3. Figures. Pour donc tirer de la même proprieté generale une proprieté particuliere pour chaque Section Conique, pour les differencier les unes d'avec les autres, & pour en tirer des conſtructions particulieres, ſuppoſons

$$AB \backsim d.$$
$$BG \backsim p.$$
$$BD \backsim x.$$
$$CD \backsim y.$$

pour avoir $AD \backsim d \dagger x$, pour les *Fig.* 1. 3. & $AD \backsim d - x$, pour la *Fig.* 2. & par la proprieté generale on aura cette analogie,

$$dx \dagger xx, yy :: d, p.$$

pour les *Fig.* 1. 3. & pour la *Fig.* 2. on aura celle-cy,

$$dx - xx, yy :: d, p.$$

& par conſequent cette Equation conſtitutive,

$$yy \backsim px \dagger \frac{pxx}{d},$$

pour les *Fig.* 1. 3. & pour la *Fig.* 2. on aura celle-cy,

$$yy \backsim px - \frac{pxx}{d}.$$

1. Figure. Si nous ſuppoſons le Diametre AB, d'une grandeur infinie, en ſorte qu'on ait $d \backsim \infty$, le terme $\frac{\infty x}{d}$ s'évanoüira, & l'Equation conſtitutive $yy \backsim px \dagger \frac{pxx}{d}$ ou $yy \backsim px - \frac{pxx}{d}$, ſe changera en celle-cy, $yy \backsim px$, où l'on voit que le Quarré de l'Ordonnee CD, eſt égal au Rectangle ſous le Parametre BG, & la partie correſpondante BD, lorſque le Diametre AB, eſt infini, c'eſt-à-dire, lorſque la courbe BCE, n'a point de Diametre determiné en dehors. Dans ce cas la courbe BCE, ſe nommera *Parabole*.

PARABOLE. Ainſi vous voyez qu'une Parabole eſt une Section Conique indeterminée, où les Quarrez des Ordonnées

nées à un Diametre ſont égaux aux Rectangles ſous le Parametre de ce Diametre, & les parties correſpondantes du même Diametre, en les prenant depuis le Sommet, & ſont par conſequent proportionnels à ces mêmes parties ; c'eſt-à-dire, que le Quarré CD, eſt au Quarré EF, comme la partie BD, à la partie BF. Mais cela ſe connoîtra mieux, lorſque nous traiterons en particulier de la Parabole. 1. Fig.

Lorſque le Diametre AB, ſera determiné, l'Equation conſtitutive de la *Fig.* 2. où la courbe BCE, renferme un eſpace, demeurera la même, ſçavoir $yy \backsim px - \frac{m}{n}$, & cette courbe BCE, ſe nommera *Ellipſe*, laquelle ſe changera en *Cercle*, lorſque le Diametre AB, ſera égal à ſon Parametre BG, & qu'il ſera un Axe, parce que dans ce cas l'Equation conſtitutive $yy \backsim px - \frac{m}{n}$, ſe changera en celle-cy, $yy \backsim px - xx$, laquelle fait connoître que le Rectangle ADB, ſeroit égal au Quarré de l'Ordonnée correſpondante CD, & que pareillement le Rectangle AFB, ſeroit égal au Quarré de l'Ordonnée correſpondante EF, comme dans le Cercle. C'eſt pourquoy pour faire que la courbe BCE, ſoit toûjours une Ellipſe, il ne faut pas que le Diametre AB, ſoit un Axe, lorſqu'il eſt égal à ſon Parametre BG. 2. Fig.

Ainſi vous voyez qu'une Ellipſe eſt une Section Conique qui renferme un eſpace, où les Quarrez des Ordonnées à un Diametre ſont proportionnels aux Rectangles ſous les parties correſpondantes du même Diametre, qui ne doit pas être un Axe, lorſqu'il eſt égal à ſon Parametre ; c'eſt-à-dire, que le Quarré CD, eſt au Quarré EF, comme le Rectangle ADB, au Rectangle AFB. Mais cela ſe concevra mieux, lorſ- ELLIPSE.

que nous traiterons en particulier de l'Ellipſe.

3. Fig. Enfin, lorſque le Diametre AB, ſera auſſi determiné, l'Equation conſtitutive de la *Fig.* 3. où la courbe BCE, eſt indeterminée, demeurera auſſi la même, ſçavoir $yy \backsim px \dagger \frac{m}{n} xx$, & cette courbe BCE, ſe nommera *Hyperbole*, que nous appellerons *Equilatere*, lorſque le Diametre AB, ſera égal à ſon Parametre BG, auquel cas l'Equation conſtitutive $yy \backsim px \dagger \frac{m}{n} xx$, ſe changera en celle-cy, $yy \backsim px \dagger xx$, laquelle fait connoître que dans ce même cas le Rectangle ADB, ſera égal au Quarré CD, & que pareillement le Rectangle AFB, ſera égal au Quarré de l'Ordonnée correſpondante EF.

Hyperbole. Ainſi vous voyez qu'une Hyperbole eſt une Section Conique indeterminée, où les Quarrez des Ordonnées à un Diametre indeterminé ſont proportionnels aux Rectangles ſous les parties correſpondantes du Diametre indeterminé, en les prenant depuis le Sommet, & les mêmes parties augmentées du Diametre determiné. C'eſt-à-dire, que le Quarré CD, eſt au Quarré EF, comme le Rectangle ADB, au Rectangle AFB. Mais cela s'entendra mieux, lorſque nous traiterons en particulier de l'Hyperbole.

DE LA PARABOLE.

Generation de la Parabole.

S'Il y a sur un Plan un Angle quelconque FBG, dont l'une des lignes comme BF, soit indeterminée, & l'autre BG, soit determinée; je dis, que l'on peut trouver sur le même Plan une infinité de points d'une Parabole, dont le Sommet sera B, le Diametre BF, & le Parametre BG, en sorte que le Quarré d'une Ordonnée au Diametre BF, comme de CD, soit égal au Rectangle sous le Parametre BG, & la partie correspondante BD, telle qu'est la proprieté de la courbe que nous avons appellée *Parabole* : sçavoir en cherchant entre le Parametre BG, & la partie BD, une moyenne proportionnelle DC, laquelle étant parallele au Parametre BG, donnera en son extrémité C, un point de la Parabole; & pareillement en cherchant entre le même Parametre BG, & la partie BF, une moyenne proportionnelle FE, laquelle étant parallele au Parametre BG, donnera en son extrémité E, un autre point de la Parabole; & ainsi ensuite. *1. Figure.*

Mais pour avoir une pratique aisée, supposons que l'Angle FBG, soit droit, en sorte que le Diametre BF, soit un Axe. Prolongez cét Axe BF, au delà du Sommet B, en H, en sorte que la partie BH, *4. Fig.* *Construction de la Parabole.*

4. Figure. ſoit égale au Diametre BG, & décrivez à l'entour des lignes HD, HF, &c. les demi-cercles HID, HLF, qui donneront ſur le Parametre BG, prolongé, les longueurs BI, BL, des Ordonnées CD, EF, qu'on cherche.

Demonſtration. La demonſtration en eſt évidente : car puiſque le Rectangle des lignes HB, BD, ou des lignes BG, BD, eſt par *35. 3.* égal au Quarré de la ligne BI, ou CD, il eſt de neceſſité que le point D, ſoit de la Parabole. Pareillement, puiſque le Rectangle des lignes, BH, BD, ou BG, BD, eſt égal au Quarré BI, ou EF, le point E, doit être de la Parabole. Ainſi des autres.

L'Analyſe nous enſeignera une autre conſtruction de la Parabole, qui ſera beaucoup plus facile que la precedente. Pour découvrir cette conſtruction, ſup-

5. Figure. poſons que ſur l'Axe BD, on ait décrit par le Sommet B, la Parabole BC, dont le Parametre ſoit BG, & une des Ordonnées à l'Axe BD, ſoit CD. Supposons encore que ſur le même Axe BD, prolongé, on ait déterminé les deux lignes égales BA, BF, en ſorte qu'en quelque diſtance du Sommet B, que ſoit l'Ordonnée CD, les lignes AD, FC, ſoient toûjours égales entre elles: car ainſi en portant la longueur de la ligne AD, depuis F, de côté & d'autre ſur la perpendiculaire indeterminée CD, on aura en C, deux points de la Parabole, & l'on en pourra trouver de la même façon ſur d'autres perpendiculaires indeterminées autant d'autres points que l'on voudra, lorſqu'on aura une fois determiné la longueur des lignes BA, BF, en ſorte que cette longueur ſoit

invariable & propre pour toutes les Ordonnées que l'on voudra tirer à l'Axe BD, pour y marquer sur chacune deux points de la Parabole, comme nous venons de dire. 5. Figure.

Pour cette fin, il faut que la longueur des lignes BA, BF, soit indépendante de la partie indeterminée BD; autrement cette même longueur ne pourroit pas servir pour toutes les perpendiculaires indeterminées; & il la faudroit changer autant de fois, que la perpendiculaire indeterminée CD, changeroit de place; c'est-à-dire, autant de fois que la partie correspondante BD, deviendroit plus grande ou plus petite; ce qui seroit trop incommode, & il vaudroit bien mieux décrire la Parabole par la methode precedente.

Pour donc determiner la longueur des lignes égales BA, BF, indépendamment de la partie BD, & seulement par rapport au Parametre BG, qui est invariable à l'égard de son Diametre BD, au lieu que la longueur BD, peut changer en une infinité de manieres differentes : supposons

$$BD \backsim x.$$
$$CD \backsim y.$$
$$BG \backsim p.$$
$$BA \backsim z.$$
$$BF \backsim z.$$

pour avoir

$$AD \backsim x+z.$$
$$DF \backsim x-z.$$
$$CFq \backsim xx-2zx+zz+yy,$$
ou $$CFq \backsim xx-2zx+zz+px,$$
à cause de $$yy \backsim px.$$

5. Figure. par la proprieté de la Parabole ; & parce que la ligne AD, doit être égale à la ligne CF, leurs Quarrez seront égaux, & l'on aura cette Equation, $xx+2zx+zz \sim xx-2zx+zz+px$, dans laquelle on trouvera $z \sim \frac{1}{4}p$: ce qui fait connoître que la longueur des lignes BA, BF, est égale chacune au quart du Parametre BG; & comme le Parametre BG, est invariable, la longueur des lignes BA, BF, sera aussi invariable; & elle contribuëra pour trouver autant de points que l'on voudra de la Parabole, en cette sorte.

Construction plus facile de la Parabole. Ayant pris sur l'Axe BD, prolongé, les lignes BA, BF, égales chacune au quart du Parametre BG, portez la ligne AD, à droit & à gauche depuis le point F, sur la perpendiculaire correspondante CD, pour avoir en C, deux points de la Parabole, de sorte que le Rectangle des lignes BG, BD, sera égal au Quarré de l'Ordonnée CD.

Demonstration. Car par 8. 2. on a $4BFBD+DFq \sim ADq$, & à cause de $4BF \sim BG$, & de $AD \sim CF$ par la construction, on aura $BGBD+DFq \sim CFq$; & à cause de $CFq \sim CDq+DFq$, par 47. 1. on aura $BGBD+DFq \sim CDq+DFq$; & ôtant DFq, il restera $BGBD \sim CDq$. Ce qu'il faloit demontrer.

Ce qui nous a excité à faire la ligne CF, égale à la ligne AD, plûtôt qu'à la ligne BD, ou qu'à quelque autre ligne, est afin d'avoir les lignes BA, BF, d'une grandeur invariable, & consequemment indépendante de la ligne indeterminée $BD \sim x$. Pour cette fin il ne faut pas que dans la valeur trouvée de CFq, sçavoir $xx-2xz+zz+px$, la quantité indeterminée x, y demeure : ce qui ne se peut faire plus

commodément, qu'en égalant cette valeur $xx-2xz$ 5. Figure. $+zz+px$, au Quarré $xx+2xz+zz$, de la ligne $AD \sim x+z$, comme il a été fait.

Ce qui nous a auſſi incité à rendre égales les lignes BA, BF, eſt que ſi on leur donnoit une autre raiſon qu'une raiſon d'égalité, on n'en pourroit pas determiner les longueurs indépendamment de la ligne indeterminée BD. Car ſi ayant ſuppoſé $BF \sim z$, on ſuppoſoit $BA \sim \frac{aa}{b}$, afin qu'elle fût à la premiere $BF \sim z$, dans la raiſon des deux quantitez a, b, on auroit $AD \sim x+\frac{aa}{b}$, & par conſequent $ADq \sim xx+\frac{aaa}{b}+\frac{aaaa}{bb}$, lequel étant égal à CFq, qui eſt $xx-2zx+zz+px$, on auroit cette Equation, $xx+\frac{aaa}{b}+\frac{aaaa}{bb} \sim xx-2zx+zz+px$, laquelle étant reduite par l'Antitheſe & par l'Iſomerie, on auroit celle-cy, $2abxz+2bbxz \sim bbpx+bbzz-aazz$, où l'on pourroit trouver la valeur de z, ou de DF: & comme la quantité indeterminée x, demeureroit dans cette valeur, ce qui empêcheroit de pouvoir donner des longueurs invariables aux lignes BA, BF, il faut faire évanouïr cette lettre x, de l'Equation precedente, $2abxz+2bbxz \sim bbpx+bbzz-aazz$; ce qui ſe pourroit faire, ſi les deux termes $aazz$, $bbzz$, n'y étoient pas, parce que le reſte $2abxz+2bbxz \sim bbpx$, ſe pourroit diviſer par x. Détruiſons donc ces deux termes $aazz$, $bbzz$, par cette Equation, $bbzz-aazz \sim 0$, dans laquelle on trouvera $a \sim b$. Ce qui fait connoître que l'on doit donner une raiſon d'égalité aux deux lignes, BA, BF, comme il a été fait.

COROLLAIRE I.

APRE'S avoir dit que le point F, ſe nomme

3. Figure. *Foyer*, nous dirons qu'il suit évidemment de ces deux constructions, que la Parabole *BC*, doit passer par le point *B*, lequel par consequent sera son Sommet à l'égard de l'Axe *BD*, qui est un Diametre.

COROLLAIRE II.

IL suit aussi de ces deux constructions, que la Parabole *BC*, va toûjours s'élargissant, parce que les Ordonnées à l'Axe *BD*, vont toûjours croissant à mesure qu'elles s'éloignent du Sommet *B*.

COROLLAIRE III.

IL s'ensuit encore des deux mêmes constructions, que l'Axe *BD*, divise ses Ordonnées en deux également; & c'est à cause de cela que nous avons dit auparavant qu'il étoit un Diametre.

COROLLAIRE IV.

IL s'ensuit de plus, que toutes les Ordonnées à l'Axe *BD*, sont toûjours plus petites à mesure qu'elles s'approchent du Sommet *B*, de sorte que celle qui passeroit par le Sommet *B*, se reduiroit à rien, & étant prolongée toucheroit la Parabole *BC*, en ce même point *B*, parce qu'autrement elle ne seroit pas divisée en deux également par l'Axe *BD*.

Ainsi, on voit que le Parametre *EG*, dans la position que nous luy avons donnée, qui est d'être toûjours parallele aux Ordonnées de l'Axe *BD*, ou perpendiculaire à l'Axe *BD*, touche la Parabole *BC*, au Sommet *B*, tant par ce qui vient d'être dit, que parce que s'il la rencontroit encore en un point, comme *O*, la ligne *FO*, seroit égale à la ligne *AB*, par la generation, & par consequent à la ligne *BF*, ce qui est impossible, parce que la ligne *FO*, qui est opposée

à

à l'Angle droit *B*, doit être plus grande que la ligne *BF*, qui eſt oppoſée à l'Angle aigu *O*, du Triangle Rectangle *FBO*. 5. Figure.

DEFINITIONS.

Touchante d'une Parabole, c'eſt une ligne droite, qui ne rencontrant la Parabole qu'en un point, ne la coupe pas, c'eſt-à-dire, n'entre pas au dedans de la Parabole. 1.

Ordonnées dans une Parabole, ce ſont des lignes droites tirées au dedans de la Parabole parallelement à une même Touchante, & terminées de côté & d'autre par la Parabole. On prend neanmoins ordinairement la moitié d'une ſemblable ligne pour une Ordonnée. 2.

Diametre d'une Parabole, c'eſt une ligne droite, qui diviſe en deux également toutes les Ordonnées, qui ſont paralleles entre elles, à l'égard deſquelles il eſt appellé Diametre. Il eſt évident que ce Diametre paſſera toûjours par le point où la Parabole eſt touchée par la ligne droite, à laquelle les Ordonnées au même Diametre ſont paralleles. 3.

Axe de la Parabole, c'eſt un Diametre perpendiculaire à ſes Ordonnées. 4.

Sommet de la Parabole, c'eſt l'extrémité du Diametre; ou le point où ce Diametre coupe la Parabole; ou le point par lequel paſſe la Touchante, à laquelle les Ordonnées à ce Diametre ſont paralleles. 5.

Parametre d'un Diametre de la Parabole, c'eſt une partie de la Touchante qui paſſe par le Sommet, & qui eſt troiſiéme proportionnelle à la partie du même Diametre, compriſe entre le Sommet & une Ordon- 6.

5. *Figure.* née, & à cette Ordonnée terminée par le Diametre, & par la Parabole.

7. *Foyer* d'une Parabole, c'eſt un point de l'Axe au dedans de la Parabole, éloigné du Sommet d'une quantité égale à la quatriéme partie du Parametre de l'Axe.

8. *Perpendiculaire* à une Parabole, c'eſt une ligne droite, qui coupant la Parabole en un point, eſt perpendiculaire à la Touchante, qui paſſe par ce même point.

PROPOSITION I.

Etant donnée une Parabole, avec ſon Axe, trouver ſon Parametre & ſon Foyer.

5. *Figure.* ON donne la Parabole BC, avec ſon Axe BD, & il eſt propoſé d'en trouver le Parametre à l'égard de cét Axe, & ſon Foyer. Tirez au dedans de la Parabole BC, une ligne quelconque CD, perpendiculaire à l'Axe BD, laquelle ſera une Ordonnée au même Axe BD, par *Def.* 3. & cherchez à la partie BD, & à l'Ordonnée correſpondante CD, une troiſiéme proportionnelle BG, laquelle étant tirée par le Sommet B, parallelement à l'Ordonnée CD, repreſentera le Parametre de l'Axe BD, par *Def.* 6.

Pour trouver le Foyer, prenez ſur l'Axe BD, la partie BF, égale à la quatriéme partie du Parametre BG, & le point F, ſera le Foyer qu'on cherche, par *Def.* 7.

SCOLIE. 5. Figure.

SI au lieu de l'Axe *BD*, le Foyer *F* étoit donné, & que par ſon moyen on voulût trouver l'Axe, il faudroit décrire du Foyer *F*, une circonference de cercle, avec une telle ouverture, qu'elle pût couper la Parabole *BC*, en deux points, comme *C*, *C*, leſquels étant joints par la droite *CC*, on devroit tirer à cette droite *CC*, par le Foyer *F*, la perpendiculaire *BD*, qui ſera l'Axe de la Parabole *BC*, puiſqu'elle diviſe en deux également, & à Angles droits l'Ordonnée *CC*.

PROPOSITION II.

Une ligne droite tirée au dedans d'une Parabole parallelement à l'Axe, coupe la Parabole en un ſeul point.

JE dis que ſi la ligne *CH*, eſt parallele à l'Axe *BD*, de la Parabole *BC*, elle coupera la Parabole *BC*, au ſeul point *C*, parce que la Parabole *BC*, s'élargiſſant toûjours, & s'éloignant par conſequent de plus en plus de ſon Axe *BD*, par la generation, elle s'éloignera auſſi de la ligne *CH*, parallele à l'Axe *BD*, laquelle par conſequent ne ſçauroit couper la Parabole *BC*, qu'au ſeul point *C*. Ce qu'il faloit demontrer. 5. Figure.

SCOLIE.

SI on prolonge cette parallele *CH*, au dehors de la Parabole *BC*, juſqu'à ce qu'elle rencontre en *I*, la droite *AI*, laquelle étant parallele à l'Ordonnée *CD*, ou perpendiculaire à l'Axe *BD*, paſſe par le

5. Figure. point A, autant éloigné du Sommet B, que le Foyer F, & qu'on mene les droites FI, FC, on connoîtra aiſément que les lignes CI, CF, ſont egales, parce que CI, eſt égale à AD, à cauſe du Parallelograme $ADCI$, & que AD, eſt égale à CF, par la generation. D'où il ſuit, que les deux Angles CIF, CFI, ſont toûjours égaux : ce qu'il eſt bon de remarquer, parce que cela nous ſervira dans la ſuite.

PROPOSITION III.

Tirer une Touchante par un point donné ſur une Parabole donnée, dont l'Axe eſt auſſi donné.

6. Figure. POUR tirer une Touchante par le point donné C, ſur la Parabole donnée BEC, dont l'Axe BD, eſt auſſi donné, tirez de ce point C, à l'Axe BD, l'Ordonnée CD ; & ayant prolongé l'Axe BD, en H, en ſorte que la partie BH, ſoit égale à la partie BD, menez la droite HC, qui touchera la Parabole donnée BEC, au point donné C, de ſorte qu'elle ne la rencontrera pas en quelque autre point.

Demonſtration. Car ſi on veut que la droite HC, rencontre la Parabole BEC, encore en un point, comme en E, tirez par ce point E, à l'Axe BD, l'Ordonnée EL, & faites $BK \backsim BL$, pour avoir $KH \backsim DL$, à cauſe des lignes égales BH, BD, & des deux égales BK, BL, par la conſtruction.

Cette preparation étant faite, on aura par la ge-

neration, cette Analogie $BL, BD :: ELq, CDq$; & en doublant les deux premiers termes BL, BD, on aura celle-cy, $KL, HD :: ELq, CDq$; & en donnant aux deux premiers termes KL, HD, la hauteur commune HD, on aura celle-cy, $KLHD, HDq :: ELq, CDq$. Et ſi à la place des deux derniers termes ELq, CDq, on met les deux HLq, HDq, qui ſont en même raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables HLE, HDC, on aura cette autre Analogie $KLHD, HDq :: HLq, HDq$, où l'on voit, que puiſque les deux conſequens ſont égaux, les deux antecedens $KLHD, HLq$, ſont égaux auſſi : d'où l'on tire cette Analogie, $KL, HL :: HL, HD$; & en diviſant, celle-cy $KH, HL :: DL, DH$, où l'on voit, que puiſque les antecedens KH, DL, ſont égaux, les conſequens HL, DH, ſont égaux auſſi; ce qui étant impoſſible, il eſt impoſſible auſſi que la droite HC, rencontre la Parabole BEC, encore au point E. C'eſt pourquoy par *Def.* 1. la droite HC, ſera une Touchante. Ce qu'il faloit faire & démontrer. 6. *Figure.*

SCOLIE.

COMME cette démonſtration ne ſuppoſe pas que l'Angle D, ſoit droit, c'eſt-à-dire, que le Diametre BD, ſoit un Axe, on voit que cette méthode ſe peut appliquer à quelque Diametre que ce ſoit, pourvû que l'on ſçache tirer à ce Diametre une Ordonnée par un point donné ſur la Parabole donnée, comme nous enſeignerons dans la *Prop. IX.* & que l'on ſoit perſuadé, que les Quarrez des Ordonnées à quelque Diametre que ce ſoit, ſont proportionnels aux par-

6. Figure. ties correſpondantes de ce Diametre, en les prenant depuis le Sommet, comme il ſera démontré dans la *Prop. XI.*

Autre conſtruction. Si vous voulez une conſtruction particuliere pour le Diametre B D, quand il eſt un Axe, ayant trouvé par *Prop. I.* le Parametre BG, & le Foyer F, menez

7. Figure. par le point donné C, à l'Axe BD, la parallele CI; & ayant tiré la droite CF, diviſez l'Angle FCI, en deux également par la droite CH, qui touchera la Parabole donnée BCE, au point donné C, de ſorte qu'elle ne la rencontrera pas en quelque autre point.

Demonſtration. Car ſi on veut que la droite CH, rencontre la Parabole BEC, encore au point E, que l'on tire par ce point E, à l'Axe BD, ou à la ligne CI, la parallele EO, & que l'on joigne les droites EI, EF, & encore la droite FI, qui ſera diviſée à Angles droits & en deux également au point P, par la droite CH, à cauſe des deux lignes égales CI, CF, comme il a été demontré au Scolie de la Propoſition precedente, par lequel on connoît que les deux lignes EO, EF, ſont auſſi égales.

Cela étant ſuppoſé, on connoîtra par 4. 1. que les deux Triangles Rectangles EPI, EPF, ſont égaux, parce qu'ils ont le côté commun EP, & les deux autres PI, PF, égaux; ce qui fait que les deux Hypotenuſes EI, EF, ſont égales entre elles, & par conſequent à la ligne EO; ce qui étant impoſſible à cauſe du Triangle Rectangle EOI, il eſt impoſſible auſſi, que la droite CH, rencontre la Parabole BEC, encore au point E. Ce qu'il faloit demontrer.

On peut tirer aiſément de ces deux conſtructions

une troiſiéme conſtruction, qui eſt tres-ſimple, comme vous allez voir. Ayant fait $FH \backsim FC$, menez la droite CH, qui touchera la Parabole donnée BEC, au point donné C. *Troiſiéme conſtruction.* *7. Figure.*

Car à cauſe de $FH \backsim FC$, par la conſtruction, & de $FC \backsim AD$, par la generation, on aura $FH \backsim AD$; & ſi de ces deux lignes égales FH, AD, on ôte les deux égales BF, AB, il reſtera les deux égales BH, BD: c'eſt pourquoy par la premiere conſtruction, la droite CH, ſera une Touchante. Ce qu'il faloit demontrer. *Demonſtration.*

PROPOSITION IV.

Si une ligne droite touche une Parabole, cette Touchante coupera l'Axe en un point autant éloigné du Sommet, que l'Ordonnée, qui paſſe par le point d'attouchement.

JE dis que ſi la droite CH, touche la Parabole BEC, au point C, par où il paſſe à l'Axe BD, l'Ordonnée CD, cette Touchante CH, coupe l'Axe BD, au point H, qui eſt autant éloigné du Sommet B, que l'Ordonnée CD, c'eſt-à-dire, que les parties BD, BH, ſont égales. *8. Figure.*

Car, ſi l'une étoit plus grande que l'autre, comme BD, qu'on en retranche $BL \backsim BH$, & que par le point L, on tire à l'Axe BD, l'Ordonnée EL, qui rencontre icy la Parabole BEC, au point E, par où l'on tirera au point H, la droite HE, qui touchera la Parabole BEC, au point E, par la Propoſition prece- *Demonſtration.*

8. Figure. dente; & parce que la ligne $\mathcal{C}H$, eſt auſſi une Touchante par la ſuppoſition, ces deux Touchantes $H\mathcal{E}$, $H\mathcal{C}$, doivent neceſſairement ſe rencontrer proche les points d'attouchement $\mathcal{E}$, C, au dehors de la Parabole ; & comme elles ſe rencontrent auſſi au point H, elles comprendront un eſpace: ce qui étant impoſſible, il eſt impoſſible auſſi que les deux parties B D, B H, ſoient inégales. Ce qu'il faloit demontrer.

SCOLIE.

ON voit aiſément que ce Theoreme eſt auſſi veritable, quand le Diametre B D, n'eſt pas un Axe, parce que la Propoſition precedente, par le moyen de laquelle celle-cy ſe demontre, convient à tout Diametre, comme nous avons remarqué.

COROLLAIRE I.

AINSI, vous voyez que d'un même point pris hors de la Parabole, on ne peut pas tirer deux Touchantes: mais il s'enſuit auſſi, que du même point C, pris ſur la Parabole $\mathcal{B}\mathcal{E}$C, on ne peut tirer qu'une Touchante, comme C H: car ſi l'on en pouvoit tirer encore une, comme C K, qui rencontrât l'Axe $\mathcal{B}$D, prolongé au point K, chacune des deux parties B H, B K, ſeroit égale à la même B D. Ce qui eſt impoſſible.

COROLLAIRE II.

IL ſuit auſſi de cette Propoſition, que ſi par le point d'attouchement C, on tire à l'Axe B D, la parallele C M, & qu'on acheve le reſte, comme dans la Propoſition precedente, l'Angle MCN, de la Touchante HN, avec la parallele C M, eſt égal à l'Angle $\mathcal{F}$CH, de la même Touchante H N, avec

la

la ligne CF, qui se tire du Foyer $\mathcal{F}$, par le point d'attouchement C. *8. Figure.*

Car si aux deux lignes égales $\mathcal{B}H$, BD, on ajoûte les deux égales $\mathcal{B}F$, $\mathcal{B}A$, on aura les deux égales FH, AD, & à cause de $AD = CF$, par la generation, on aura $FH = C\mathcal{F}$; & l'Angle H, ou son égal MCN, sera égal à l'Angle FCH. Ce qu'il faloit demontrer. *Demonstration.*

C'est pourquoy, si l'on avoit un Miroir Parabolique, poli en dedans, dont le profil fût la Parabole BEC, & que CM, representât un rayon du Soleil, parallele à l'Axe BD, ce rayon CM, & tous les autres qui seroient paralleles au même Axe BD, se reflechiroient au dedans du Miroir Parabolique par des Angles de reflexion égaux à ceux d'incidence, & s'uniroient au Foyer F, où par consequent ils pourroient produire du feu; & c'est ce qui a donné le nom de *Foyer* au point F.

COROLLAIRE III.

IL suit encore de cette Proposition, que la Touchante CH, divise l'Angle FCI, en deux également; de sorte que l'Angle HCI, est égal à l'Angle HCF, parce que cét Angle $HC\mathcal{F}$, a été demontré égal à l'Angle H, ou à l'Angle MCN, qui est égal à l'Angle HCI.

Puisque la Touchante CH, retranche la partie BH, égale à la partie BD, lorsque HD, est un Diametre, s'il faloit tirer une Touchante par le point donné H, hors de la Parabole, il faudroit tirer par ce point H, le Diametre HD; ce qui sera facile, parce que tous les Diametres d'une Parabole sont pa-

8. Figure. ralleles, comme nous le demontrerons dans la *Prop. VIII.* & faire $BD \sim BH$, pour tirer par le point D, au Diametre HD, l'Ordonnée DC, qui donnera en C, le point d'attouchement.

PROPOSITION V.

Si à la Touchante d'une Parabole on tire par le point d'attouchement une perpendiculaire, qui rencontre l'Axe en un point, la partie de l'Axe compriſe entre ce point & l'Ordonnée qui paſſe par le point d'attouchement, ſera égale à la moitié du Parametre de l'Axe.

7. Fig. JE dis, que ſi la Touchante CH, de la Parabole BEC, on tire par le point d'attouchement C, la perpendiculaire CP, qui rencontre en P, l'Axe BP, la partie DP, compriſe entre le point P, & l'Ordonnée CD, ſera égale à la moitié du Parametre BG, ou à la ligne AF, le point F, étant le Foyer, & les deux lignes AB, BF, étant égales.

Demonſtration. Car à cauſe du Triangle Rectangle HCP, on connoît par 8. 6. que le Quarré CD, eſt égal au Rectangle HDP; & à cauſe de la Parabole BEC, on connoît que le même Quarré DC, eſt égal au Rectangle GBD, d'où il ſuit que les deux Rectangles HDP, GBP, ſont égaux, & que par conſequent on a cette Analogie $BG, DH :: PD, BD$; & ſi on prend les moitiez des deux premiers termes, BG, DH, on aura celle-cy, $AF, BD :: PD, BD$; où l'on voit, que puiſque les conſequens ſont égaux, les antecedens

AF, *PD*, ſont égaux auſſi. Ce qu'il faloit demontrer. *7. Figure.*

COROLLAIRE I.

IL ſuit de cette Propoſition, que les trois lignes *FH*, *FC*, *FB*, ſont égales : car il a deja été demontré au *Coroll. II.* de la Propoſition precedente, que les deux *FH*, *FC*, ſont égales ; & l'on connoîtra que les deux *FC*, *FP*, ſont égales auſſi, en ajoûtant à chacune des deux égales *AF*, *DP*, la commune *DF* : car ainſi on aura *AD*, ou *FC*, égale à *FP*.

COROLLAIRE II.

IL s'enſuit auſſi, que ſi on prend ſur l'Axe *BP*, la partie *DP*, égale à la ligne *AF*, ou à la moitié du Parametre *BG*, & qu'on tire la droite *CP*, cette ligne *CP*, ſera perpendiculaire à la Parabole *BEC*, par *Def.* 8. parce que le Triangle *HCP*, ſera Rectangle en *C*.

Car ſi aux deux lignes égales *DP*, *AF*, on ajoûte la commune *DF*, on aura *AD*, ou FC, ou FH, égale à FP, & le Foyer F, ſera le centre d'un cercle, qui paſſera par les trois points H, C, P, ce qui rend droit l'Angle HCP ; & la ligne CP, perpendiculaire à la Parabole *BEC*. Ce qu'il faloit demontrer. *Demonſtration.*

PROPOSITION VI.

Tirer une ligne, qui touchant une Parabole donnée, faſſe avec l'Axe un Angle égal à un Angle aigu donné.

POUR tirer une ligne droite, comme CH, qui touche la Parabole donnée *BC*, dont l'Axe *BD*, *9. Figure.*

9. Figure. est aussi donné, & qui fasse avec le même Axe BD, un Angle, comme CHD, égal à un Angle aigu donné; ayant trouvé par *Prop. I.* le Foyer F; & ayant fait $BA = BF$, tirez par les deux points A, F, à l'Axe BD, les perpendiculaires indefinies AI, FE; & ayant tiré du Foyer F, la droite FI, qui fasse avec la ligne FE, l'Angle EFI, égal à l'Angle aigu donné, tirez par le point I, où elle rencontre la ligne AI, à l'Axe BD, la parallele IC, qui donnera sur la Parabole BC, le point C, par où vous tirerez, par *Prop. III.* la Touchante CH, qui fera en H, l'Angle CHD, égal à l'Angle EFI, & par consequent à l'Angle aigu donné.

Demonstration. Car la droite FI, sera perpendiculaire à la Touchante CH, par *Constr. 2. Prop. III.* c'est pourquoy les deux Triangles Rectangles IPQ, HAQ, seront semblables, à cause des Angles droits A, P, & des deux égaux IQP, AQH, ce qui rend l'Angle QIP, ou EFP, égal à l'Angle AHQ. Et comme l'Angle EFP, est égal au donné, par la construction, l'Angle AHQ, sera aussi égal au donné. Ce qu'il faloit faire & demontrer.

SCOLIE.

IL est évident, que si au contraire on vouloit tirer à la Parabole BC, une perpendiculaire, comme CR, qui fist avec l'Axe BD, un Angle égal à un Angle aigu donné, il faudroit faire l'Angle AFI, égal au donné; & ayant tiré la Touchante CH, comme auparavant, on luy devroit tirer par le point C, d'attouchement, la perpendiculaire CR, qui feroit avec l'Axe BD, l'Angle CRB, égal au donné, parce que cét

Angle CRB, eſt égal à l'Angle EFI, égal au donné, par la conſtruction, à cauſe des deux paralleles RC, FI, la premiere RC, étant perpendiculaire à la Touchante CH, par la conſtruction, & la ſeconde FI, auſſi, par *Prop. I.* 9. Figure.

Il eſt auſſi évident, que puiſque la ligne CR, eſt perpendiculaire à la Parabole BC, elle eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut tirer du point R, à la même Parabole BC; & que puiſque la ligne CH, touche la Parabole BC, elle eſt la plus grande de toutes celles qu'on peut tirer du point H, à la même Parabole BC.

PROPOSITION VII.

Si par un point d'une Parabole on tire une ligne droite qui coupe la Parabole & ſon Axe, cette ligne droite étant continuée, coupera la Parabole en un autre point.

JE dis, que ſi par le point C, de la Parabole BC, on tire la droite CE, qui coupe la Parabole BC, au même point C, & ſon Axe BH, en I, cette ligne CE, étant continuée, coupera la Parabole BC, en quelque autre point, comme en E. 10. & 11. Figures.

La demonſtration en ſera évidente par la generation, lorſque la ligne CE, ſera perpendiculaire à l'Axe BH; & dans un autre cas, on fera la demonſtration en cette ſorte. Demonſtration.

Cherchez aux deux lignes BD, BI, une troiſiéme proportionnelle BH, & tirez par le point H, à l'Axe

10. & 11. Figures. BH, la perpendiculaire HE, qui rencontre icy la ligne $C\mathcal{E}$, au point $\mathcal{E}$, par où je dis, que la Parabole $\angle C$ passe.

Car ayant tiré par le point C, à l'Axe BH, la perpendiculaire CD, qui sera parallele à la ligne HE, ce qui rend semblables les deux Triangles Rectangles CDI, EHI, on considerera, que puisque par la construction, on a cette Analogie, BD, BI :: BI, BH, en divisant dans la *Fig. 10.* ou en composant dans la *Fig. 11.* on aura celle-cy, BI, BH :: DI, IH; & si à la place des deux derniers termes DI, IH, on met les deux CD, HE, qui sont en même raison, à cause des Triangles semblables CDI, EHI, on aura cette autre Analogie BI, BH :: CD, HE, & par consequent celle-cy, BIq, BHq :: CDq, HEq; & si à la place du Quarré BI, on met le Rectangle BDBH, qui luy est égal à cause des trois proportionnelles BD, BI, BH, par la construction, on aura cette autre Analogie BDBH, BHq :: CDq, HEq : & enfin, si à la place des deux premiers termes, ou des deux Rectangles BDBH, BHq, qui ont une même hauteur BH, on met leurs bases BD, BH, qui sont en même raison, par 1. 6. on aura cette derniere Analogie, BD, BH :: CDq, HEq; d'où il suit par la generation, que CD, HE, sont deux Ordonnees à l'Axe BH, & que par consequent le point E, est de la Parabole. C'est pourquoy la ligne CE, qui coupe la Parabole BC, au point C, la coupera encore au point E. Ce qu'il faloit demontrer.

SCOLIE.

COMME cette Proposition se peut demontrer de

la même façon, ſans ſuppoſer que le Diametre BH, ſoit un Axe, parce que ſes Ordonnées CD, EH, ſeront toûjours paralleles entre elles, & qu'ainſi les deux Triangles CDI, EHI, ſeront toûjours ſemblables, il eſt aiſé de juger, qu'elle ſe peut étendre à tout Diametre, pourvû que l'on ſoit convaincu de la verité de la *Prop. XI.* *10. & 11. Figures.*

COROLLAIRE.

D'où il eſt aiſé de conclure, que lorſque BH, eſt un Diametre, dont CD, EH, ſont les Ordonnées, les trois parties BD, BI, BH, ſont proportionnelles, la ligne CE, étant une ligne droite. Ce qui ſe peut demontrer par un ordre retrograde, en cette ſorte.

Par la generation on a cette Analogie BD, BH :: CD*q*, EH*q*, pour le moins lorſque le Diametre BH, ſera un Axe, & dans un autre cas, on en verra la demonſtration dans la *Prop. XI.* indépendamment de celle-cy : c'eſt pourquoy en donnant aux deux premiers termes BD, BH, la hauteur commune BH, on aura cette autre Analogie BDBH, BH*q* :: CD*q*, EH*q*; & ſi entre BD, BH, on trouve une moyenne proportionnelle BL, on aura BDBH ∽ BL*q*, & l'Analogie precedente BDBH, BH*q* :: CD*q*, EH*q*, ſe changera en celle-cy, BL*q*, EH*q* :: CD*q*, EH*q*; & par conſequent en celle-cy, BL, BH :: CD, EH. Et ſi à la place des deux derniers termes CD, EH, on met les deux DI, HI, qui ſont en même raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables CDI, EHI, on aura cette autre Analogie BL, BH :: DI, HI; & ſi à la place des deux premiers termes BL, BH, on met *Demonſtration.*

10. & 11. Figures. les deux BD, BL, qui ſont en même raiſon par la conſtruction, on aura celle-cy, BD, BL :: DI, HI; & en permutant on aura celle-cy, BD, DI :: BL, HI; & en compoſant dans la *Fig. 10.* on aura celle-cy, BD, BI :: BL, HI † BL; ou en diviſant dans la *Fig. 11.* on aura celle-cy, BD, BI :: BL, HI - BL. Or il eſt viſible, que chacune de ces deux dernieres Analogies ſe changera en celle-cy, BD, BL :: BL, BH, en mettant BL, à la place de BI; c'eſt-à-dire, en ſuppoſant BI ∽ BL; & comme cette Analogie s'accorde avec la conſtruction que nous avons faite, qui eſt que BL, ſoit moyenne proportionnelle entre les deux BD, BH, cela fait connoître que BL, eſt effectivement égale à BI, & que par conſequent les trois lignes BD, BI, BH, ſont proportionnelles. Ce qu'il faloit demontrer.

PROPOSITION VIII.

Si une ligne droite touche une Parabole, & que par le point d'attouchement on tire en dedans une ligne indefinie parallele à l'Axe, & par quelque autre point à la Touchante, une parallele terminée par la Parabole; cette derniere parallele ſera diviſée en deux également par la premiere.

11. Fig. SUPPOSONS que la droite CO, touche la Parabole CBE, au point C, & qu'elle coupe l'Axe BH en O. Suppoſons encore, que la droite GE, qui coupe la Parabole CBE, aux deux points G, E, & l'Axe BH, en I, ſoit parallele à la Touchante CO,

&

& que la droite CM, qui passe par le point d'attouchement C, soit parallele à l'Axe BH. Cela étant supposé, je dis que la droite CM, coupe la ligne GE, en deux également au point L; c'est-à-dire, que les deux lignes LE, LG, sont égales entre elles. *12. Fig.*

Car si par les quatre points C, G, L, E, on tire à l'Axe BH, les perpendiculaires CD, GH, LK, EF, dont EF, soit prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre CM, aussi prolongée en P, on connoîtra par *Prop. IV.* que les deux parties BD, BO, sont égales; & que par la nature des paralleles, le Triangle OCD, est semblable aux Triangles EFI, EPL, GHI, GML, LKI, & qu'il est égal au Triangle LKI, & que par consequent les lignes OD, IK, sont égales. *Demonstration.*

Cela étant supposé, on aura dans les Triangles semblables GHI, CDO, cette Analogie, GH, CD::HI, DO; & en prenant les moitiez des deux derniers termes HI, DO, on aura celle-cy, GH, CD::$\frac{1}{2}$HI, BD, & par consequent celle-cy, GHq, CDq::$\frac{1}{4}$HIq, BDq; & si à la place des deux premiers termes GHq, CDq, on met les deux lignes BH, BD, qui sont en même raison, par la generation, on aura cette autre Analogie, BH, BD::$\frac{1}{4}$HIq, BDq; & donnant aux deux premiers termes BH, BD, la hauteur commune BD, on aura celle-cy, BHBD, BDq::$\frac{1}{4}$HIq, BDq, où l'on voit que puisque les consequens sont égaux, les antecedens BHBD, $\frac{1}{4}$HIq, sont égaux aussi. 1.

Pareillement dans les Triangles semblables EFI, CDO, on aura cette Analogie, EF, CD::IF, DO; & en prenant les moitiez des deux derniers termes 2.

12. Fig. IF, DO, on aura celle-cy, EF, CD:: ÷IF, BD, & par conſequent celle-cy, EFq, CDq:: ÷IFq, BDq; & ſi à la place des deux premiers termes EFq, CDq, on met les deux lignes BF, BD, qui ſont en même raiſon, par la generation, on aura celle-cy, BF, BD:: ÷IFq, BDq; & en donnant aux deux premiers termes BF, BD, la hauteur commune BD, on aura celle-cy, BFBD, BDq:: ÷IFq, BDq, où l'on voit, que puiſque les conſequens ſont égaux, les antecedens BFBD, ÷IFq, ſont égaux auſſi.

3. Puiſque donc nous avons BDBH ∽ ÷HIq, par l'article premier, & BFBD ∽ ÷IFq, par l'article precedent, nous aurons BDBH-BFBD ∽ ÷HIq-÷FIq, & par conſequent cette Analogie, BD, ÷HI†÷FI:: ÷HI-÷FI, BH-BF, ou BD, ÷FH:: ÷HI-÷FI, FH, où l'on voit, que puiſque le conſequent FH, eſt double du conſequent ÷FH, auſſi l'antecedent ÷HI-÷FI, eſt double de l'antecedent BD, & par conſequent égal à DO, ou à KI.

4. Dans les Triangles ſemblables EFI, GHI, on a cette Analogie, IH, IF:: GH, EF; & en prenant les moitiez des deux premiers termes IH, IF, on aura celle-cy, ÷IH, ÷IF:: GH, EF, & en diviſant on aura celle-cy, ÷IH-÷IF, ÷IF:: GH-EF, EF; & ſi au lieu du premier terme ÷IH-÷IF, on met IK, qui luy eſt égal, par l'article precedent, on aura celle-cy, IK, ÷FI:: GH-EF, EF, & en compoſant on aura celle-cy, KI†÷FI, ÷FI:: GH, EF; & ſi à la place des deux derniers termes GH, EF, on met les deux IH, IF, qui ſont en même raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables EFI, GHI, ou ſeulement leurs moitiez.

÷IH, ÷IF, qui ſont auſſi en même raiſon, on aura cette autre Analogie, KI†÷FI, ÷FI::÷HI, ÷FI, où l'on voit, que puiſque les conſequens ſont égaux, les antecedens KI†÷FI, ÷HI, ſont égaux auſſi, & par conſequent leurs doubles 2KI†FI, HI; & comme 2KI†FI, vaut autant que FK†IK, il ſuit que FK†IK, eſt égal à IH: c'eſt pourquoy en ôtant IK, de chacun, il reſtera FK ∽ HK, ou LP ∽ LM, & par conſequent LG ∽ LE, à cauſe des Triangles ſemblables LGM, LEP. Ce qu'il faloit demontrer. 12. Fig.

COROLLAIRE.

ON demontrera de la même façon, qu'une autre ligne que GE, parallele à la même touchante CO, comme QR, ſera diviſée en deux également au point S, par la même ligne CM, laquelle, par conſequent, ſera le Diametre des Ordonnées GE, QR, par *Def.* 3. D'où il eſt aiſé de conclure, que tous les Diametres d'une Parabole, ſont paralleles entre eux & à l'Axe.

PROPOSITION IX.

Tirer à un Diametre donné par un point donné ſur une Parabole donnée, une Ordonnée.

POUR tirer au Diametre donné BD, par le point donné A, ſur la Parabole donnée ABC, une Ordonnée, tirez par le point donné A, au Sommet B, la droite AB, & la prolongez en E, en ſorte que BE, ſoit égale à AB. Tirez par le point E, au Diametre BD, la parallele EC, qui donnera ſur la Pa- 13. Fig.

13. Figure. rabole A B C, le point C, par lequel & par le point donné A, on tirera la ligne A C, qui sera l'Ordonnée qu'on cherche.

Demonstration. Car dans le Triangle A C E, la ligne B F, se trouvant parallele à la base C E, par la construction, on aura cette Analogie, A B, B E :: A F, C F, où l'on voit, que puisque les deux premiers termes A B, B E, sont égaux, par la construction, les deux derniers A F, C F, sont égaux aussi, & que la ligne A C, se trouve divisée en deux également au point F, par le Diametre B D; c'est pourquoy la ligne A C, sera une Ordonnée au Diametre donné B D, par *Def.* 3. Ce qu'il faloit faire & demontrer.

SCOLIE.

S'IL faloit tirer au Diametre donné B D, une Ordonnée par un autre point que sur la Parabole A B C, comme par le point I, il faudroit tirer par ce point I, à l'Ordonnée A C, la parallele G H, *&c.*

PROPOSITION X.

Trouver l'Axe d'une Parabole donnée.

13. Figure. POUR trouver l'Axe de la Parabole donnée A B C, tirez en dedans deux paralleles quelconques A C, G H, & par leurs points de milieu F, I, tirez la droite B D, qui sera leur Diametre, par *Def.* 3. & qui seroit l'Axe de la Parabole A B C, s'il estoit perpendiculaire à ses Ordonnées A C, G H. Autrement, il faut tirer par quelque point de la Parabole A B C, comme par le point G, au Diametre B D, la perpendiculaire G H, &

par ſon point de milieu K, tirer au Diametre B D, la parallele L K, qui ſera l'Axe qu'on cherche. *13. Fig.*

Car, puiſque tous les Diametres d'une Parabole ſont paralleles, par *Prop. VIII.* & que B D, eſt un Diametre, il faut que ſa parallele L K, ſoit auſſi un Diametre; & comme ce Diametre L K, eſt perpendiculaire à ſon Ordonnée G H, il doit être un Axe, par *Def.* 4. Ce qu'il faloit faire & demontrer. *Demonſtration.*

PROPOSITION XI.

Si l'on tire au dedans d'une Parabole deux Ordonnées avec leur Diametre, les Quarrez de ces Ordonnées ſeront proportionnels aux parties correſpondantes de ce Diametre, en les prenant depuis le Sommet.

JE dis, que ſi L E, S T, ſont deux Ordonnées au Diametre C M, de la Parabole G B T, leurs Quarrez ſont dans la raiſon des deux parties correſpondantes C L, C S, du même Diametre C M. *14. Fig.*

Pour la Demonſtration, tirez l'Axe B H, & par le point C, la Touchante C O, qui rencontre icy l'Axe B H, en O, & reciproquement par le point B, la Touchante B K, qui rencontre icy le Diametre C M, en K. Prolongez l'Ordonnée E L, juſqu'à ce qu'elle rencontre d'un côté la Parabole B C G, au point G, & le Diametre B H, aut point I; & tirez par les quatre points T, E, C, G, au Diametre B H, les Ordonnées T Z, E F, C D, G H, dont les deux premieres T Z, E F, ſeront prolongées juſqu'à ce qu'elles *Demonſtration.*

14. Fig. coupent le Diametre CM, auſſi prolongé en deux points, comme P, V.

1. Parce que la ligne BO, eſt égale à la ligne BD, par *Prop. IV.* & que la ligne BD, eſt égale à la ligne CK, par la nature des paralleles, la ligne BO, ſera auſſi égale à la ligne CK, & les Triangles ſemblables CKQ, OBQ, ſeront par conſequent égaux: c'eſt pourquoy, ſi à chacun on ajoûte le Pentagone MCQBH, on aura le Parallelograme MKBH, égal au Trapeze MCOH; & ſi à chacun des deux mêmes Triangles égaux CQK, OBQ, on ajoûte le Trapeze CDBQ, on aura le Parallelograme CDBK, égal au Triangle CDO.

2. De plus, parce que les deux Triangles CDO, EFI, ſont équiangles, par la nature des paralleles, on aura par 19. 6. cette Analogie, CDO, EFI :: CD*q*, EF*q*; & ſi à la place des deux derniers termes CD*q*, EF*q*, on met les deux BD, BF, qui ſont en même raiſon, par la generation; ou bien, ſi à la place de ces deux on met les Parallelogrames CDBK, PFBK, qui ſont en même raiſon, par 1. 6. on aura cette autre Analogie, CDO, EFI :: CDBK, PFBK; & parce que les deux antecedens CDO, CDBK, ſont égaux, comme il a été demontré, les deux conſequens, ſçavoir le Triangle EFI, & le Parallelograme PFBK, ſeront égaux auſſi.

3. Enfin, parce que le Triangle CDO, eſt égal au Parallelograme CDBK, par le premier article, ſi du Triangle CDO, on ôte le Triangle EFI, & le Trapeze CRFD, & du Parallelograme CDBK, le même Trapeze CRFD, & le Parallelograme PFBK, égal

au Triangle E F I, par l'article precedent, il reſtera le Trapeze R E I O, égal au Triangle C P R; & ſi à chacune de ces deux choſes égales on ajoûte le Trapeze C L E R, on aura le Parallelograme C L I O, égal au Triangle L P E. *14. Fig.*

On demontrera de la même façon, que le Parallelograme C S D O, eſt égal au Triangle S V T; & comme ce Triangle S V T, eſt ſemblable au premier L P E, on aura par 19. 6. cette Analogie, L P E, S V T :: L E *q*, S T *q*; & ſi à la place des deux Triangles L P E, S V T, on met les deux Parallelogrames C L I O, C S D O, qui leur ſont égaux, on aura cette autre Analogie, C L I O, C S D O :: L E *q*, S T *q*; & ſi au lieu des deux Parallelogrames C L I O, C S D O, on met leurs baſes I O, D O, qui ſont en même raiſon, par 1. 6. on aura cette autre Analogie, I O, D O :: L E *q*, S T *q*; & enfin, ſi à la place des deux premiers termes I O, D O, on met les deux C L, C S, qui leur ſont égaux, par la nature des paralleles, on aura cette derniere Analogie, C L, C S :: L E *q*, S T *q*. Ce qu'il faloit demontrer. 4.

PROPOSITION XII.

Si à un Diametre donné d'une Parabole donnée, on tire une Ordonnée, qui ſoit coupée par un autre Diametre en deux parties inégales : le Rectangle, ſous ces parties inégales, ſera égal au Rectangle ſous ce Diametre & le Parametre du premier Diametre.

15. Fig. JE dis, que ſi AC, eſt une Ordonnée au Diametre BD, de la Parabole ABC, dont le Parametre eſt BG, & que EF, ſoit un autre Diametre, le Rectangle AFC, eſt égal au Rectangle BGEF.

Demonſtration. Car, ſi l'on tire par le Sommet E, du Diametre EF, au Diametre BD, l'Ordonnée EH, on aura par la Propoſition precedente cette Analogie, BH, BD :: EH *q*, CD *q*, ou BH, BD :: FD *q*, CD *q*, à cauſe de EH ∽ FD; & en diviſant on aura celle-cy, BH, DH :: DF *q*, CD *q* - DF *q*, ou BH, EF :: DF *q*, CD *q* - DF *q*, à cauſe de DH ∽ EF; & parce que CD *q* - DF *q*, eſt égal au Rectangle ſous la ſomme CD † DF, & la difference CD-DF, ou ſous AD † DF, & CD-DF, à cauſe de AD ∽ CD, ou ſous AF, & CF, on aura cette autre Analogie, BH, EF :: DF *q*, AFC; & donnant aux deux premiers termes BH, EF, la hauteur commune BG, on aura celle-cy BGBH, BGEF :: DF *q*, AFC, où l'on voit que puiſque les antecedens BGBH, DF *q*, ou EH *q*, ſont égaux, par la generation, les conſequens BGEF, AFC, ſont égaux auſſi. Ce qu'il faloit demontrer.

PRO-

PROPOSITION XIII.

Si l'on coupe un Cone par un Plan, lequel étant perpendiculaire à la base du Triangle de l'Axe, soit parallele à l'un des deux côtez du même Triangle, la Section sera une Parabole.

IL est évident, que si on coupe un Cone par un Plan parallele à sa base, la Section sera un *Cercle*; & que si on coupe le même Cone par un Plan, qui passe par son Axe, la Section sera un *Triangle*, que l'on nomme *Triangle de l'Axe*. C'est pourquoy, au lieu de demontrer cela, nous demontrerons, que si on coupe un Cone, dont la base soit le Cercle AMCD, & le Triangle de l'Axe soit ABC, par un Plan perpendiculaire à la base AC, & parallele au côté AB, la Section MLD, sera une Parabole; sçavoir, un Plan terminé par une ligne courbe, où les Quarrez des Ordonnées ME, IH, à l'Axe LE, sont proportionnels aux parties correspondantes LE, LH, du même Axe LE, en les prenant depuis le Sommet L. *16. Fig.*

Car, si l'on coupe le Cone ABC, par un Plan, qui passant au dessus du Sommet L, soit parallele à la base ADC, de ce Cone, la Section FIGK, sera un Cercle, dont le Diametre FG, est la commune Section de ce Plan & du Triangle de l'Axe ABC; c'est pourquoy ce Diametre FG, sera parallele au Diametre AC, de la base ADC, du Cone, comme la ligne LE, qui est la Section du Triangle de l'Axe ABC, & du Plan parallele au côté AB, est parallele au même côté AB. *Demonstration.*

16. Fig. Si par la commune Section H, des deux lignes FG, LE, on tire dans le Plan du Cercle FKGI, la ligne IK, parallele à la ligne MD, laquelle étant la commune Section du Cercle ADC, & du Plan parallele au côté AB, eſt perpendiculaire au Diametre AC, cette ligne IK, ſera auſſi perpendiculaire au Diametre FG, qui eſt parallele à AC; c'eſt pourquoy chacune des deux lignes IK, MD, ſera coupée en deux également, & à Angles droits, par la ligne LE, laquelle par conſequent ſera un Axe à l'égard des deux Ordonnées HI, EM, ou KH, DE.

Parce que le Rectangle FHG, eſt égal au Quarré HI, & le Rectangle AEC, au Quarré EM, par 35. 3. on aura cette Analogie, FHG, AEC :: HIq, EMq; & ſi à la place des deux Rectangles FHG, AEC, dont les hauteurs FH, AE, ſont égales, à cauſe du Parallelograme AEHF, on met leurs baſes GH, CE, qui ſont en même raiſon, par 1. 6. on aura cette autre Analogie, GH, CE :: HIq, EMq; & encore, ſi à la place des deux premiers termes GH, CE, on met les deux LH, LE, qui ſont en même raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables LGH, LCE, on aura cette derniere Analogie, LH, LE :: HIq, EMq. D'où il ſuit par la generation de la Parabole, que la courbe MLD, eſt une Parabole. Ce qu'il faloit demontrer.

DE L'ELLIPSE.

Generation de l'Ellipſe.

S'IL y a ſur un Plan un Angle quelconque ABG, dont les deux lignes AB, BG, ſoient terminées; je dis, que l'on peut trouver ſur le même Plan une infinité de points d'une Ellipſe, dont un Diametre ſera AB, & le Parametre de ce Diametre ſera BG, en ſorte que la raiſon du Quarré d'une Ordonnée à ce Diametre AB, comme de CD, au Rectangle ſous les parties correſpondantes AC, BC, du Diametre AB, ſoit égale à celle du Parametre BG, au même Diametre AB, telle qu'eſt la proprieté de la ligne courbe que nous avons appellée *Ellipſe*; ſçavoir en cherchant au Diametre AB, à ſon Parametre BG, & au Rectangle ACB, un Quarré proportionnel, dont le côté CD, étant placé de côté & d'autre parallelement au Parametre BG, on aura en D, deux points de l'Ellipſe: & pareillement en cherchant au Diametre AB, à ſon Parametre BG, & au Rectangle AEB, un Quarré proportionnel, dont le côté EF, étant placé parallelement au Parametre BG, on aura en F, deux autres points de l'Ellipſe. Ainſi des autres. *17. & 18. Figures.*

Mais, pour avoir une pratique aiſée, ſuppoſons que l'Angle ABG, ſoit droit, en ſorte que le Diametre AB, ſoit un Axe, & que le même Diametre AB,

17. & 18. Figures. ne soit pas égal à son Parametre B G, autrement au lieu d'une Ellipse nous décririons un Cercle. Décrivez à l'entour de cét Axe A B, le demi-Cercle AIB, au dedans duquel vous tirerez sur le Diametre A B, les perpendiculaires C I, E L, pour y marquer de côté & d'autre autant de points de l'Ellipse par le moyen de la ligne A K, qui doit être moyenne proportionnelle entre l'Axe A B, & son Parametre B G; car si aux trois lignes A B, A K, C I, on trouve une quatriéme proportionnelle C D, & pareillement aux trois lignes A B, A K, E L, une quatriéme proportionnelle E F, les deux points D, F, seront de l'Ellipse.

Demonstration. Car, puisque par la construction nous avons cette Analogie, A B, A K :: C I, C D, & par consequent celle-cy, A B q, A K q :: C I q, C D q; si à la place du Quarré A K, on met le Rectangle A B G, qui luy est égal, parce que l'on a fait A K, moyenne proportionnelle entre les deux A B, B G, on aura cette autre Analogie, A B q, A B G :: C I q, C D q, & si à la place du Quarré C I, on met le Rectangle A C B, qui luy est égal, par 35. 3. on aura celle-cy, A B q, A B G :: A C B, C D q; & enfin, si au lieu des deux premiers termes A B q, A B G, on met les deux A B, B G, qui sont en même raison, par 1. 6. on aura cette derniere Analogie, A B, B G :: A C B, C D q, qui fait connoître que le point D, est de l'Ellipse. Ce qu'il faloit faire & demontrer.

On demontrera de la même façon, que le point F, est de l'Ellipse: mais on peut trouver un peu autrement les mêmes points D, F, sçavoir en cherchant aux trois lignes A K, B G, C I, une quatriéme propor-

tionnelle CD, & pareillement aux trois lignes, AK, BG, EL, une quatriéme proportionnelle EF ; & les deux points D, F, ſeront de l'Ellipſe. *17. & 18. Figures.*

Car, par la conſtruction, nous avons cette Analogie, AK, BG :: CI, CD, & par conſequent celle-cy, AK*q*, BG*q* :: CI*q*, CD*q*, ou ABG, BG*q* :: ACB, CD*q*, ou AB, BG :: ACB, CD*q*, qui fait connoître que le point D, eſt de l'Ellipſe ; & l'on demontrera de la même façon, que le point F, eſt auſſi de l'Ellipſe, &c. *Demonſtration.*

COROLLAIRE I.

IL ſuit évidemment de cette conſtruction, que l'Ellipſe paſſe par les quatre points A, H, B, M, & que par conſequent elle renferme un eſpace : & de plus, que toutes les lignes tirées au dedans de l'Ellipſe perpendiculairement à l'Axe AB, comme DD, FF, MH, ſont diviſées en deux également par le même Axe AB.

COROLLAIRE II.

IL eſt évident auſſi, que de toutes ces perpendiculaires, la plus grande eſt celle qui paſſe par le point O, milieu de l'Axe AB, comme HM : car, puiſque par la generation, nous avons cette Analogie, AOB, OM*q* :: ACB :: CD*q*, ou AO*q*, OM*q* :: ACB, CD*q*, & que l'antecedent AO*q*, eſt plus grand que l'antecedent ACB, par 5. 2. le conſequent OM*q*, ſera auſſi plus grand que le conſequent CD*q*, & le côté OM, conſequemment plus grand que le côté CD, &c.

COROLLAIRE III.

On voit auſſi que cette plus grande perpendiculaire HM, ſera plus petite que l'Axe AB, lorſque

17. & 18. Figures. cét Axe AB, ſera plus grand que ſon Parametre BG, comme dans la *Fig. 17.* & qu'elle ſera plus grande, lorſque l'Axe AB, ſera plus petit que ſon Parametre BG, comme dans la *Fig. 18.* Dans le premier cas cette plus grande perpendiculaire HM, repreſente la largeur de l'Ellipſe, & dans le ſecond cas elle en repreſente la longueur. Cette longueur & cette largeur ſeront appellez *les deux Axes* de l'Ellipſe; & le point O, où ces deux Axes s'entrecoupent à Angles droits, & en deux également, ſe nommera *Centre* de l'Ellipſe.

Corollaire IV.

Cette même plus grande perpendiculaire, ou l'Axe HM, eſt moyenne proportionnelle entre l'autre Axe AB, & ſon Parametre BG; c'eſt-à-dire, qu'elle eſt égale à la ligne AK. Car puiſque par la generation on a cette Analogie, AB, BG :: AOB, OM*q*, ou AB, BG :: AO*q*, OM*q*, à cauſe de AO = OB; ſi à la place des deux Quarrez AO, OM, on met leurs quadruples, ſçavoir les Quarrez AB, HM, on aura cette autre Analogie, AB, BG :: AB*q*, HM*q*; & ſi aux deux premiers termes AB, BG, on donne la hauteur commune AB, on aura celle-cy, AB*q*, ABG :: AB*q*, HM*q*, où l'on voit, que puiſque les antecedens ſont égaux, les conſequens ABG, HM*q*, ſont égaux auſſi : & comme le Rectangle ABG, eſt auſſi égal au Quarré AK, par la conſtruction, ce Quarré AK, ſera auſſi égal au Quarré HM, & par conſequent AK = HM. Ce qu'il faut demontrer.

Corollaire V.

Il s'enſuit auſſi; qu'une perpendiculaire quelconque à l'Axe HM, tirée au dedans de l'Ellipſe, comme

DP, eſt diviſée en deux également au point R, par le même Axe HM. Car ayant tiré des deux points D, P, ſur l'autre Axe AB, les perpendiculaires CD, LP, on aura par la generation cette Analogie, ACB, ALB :: CDq, LPq, dont les deux derniers termes CDq, LPq, étant égaux, par la nature des paralleles, les deux premiers, ou les deux Rectangles ACB, ALB, ſeront égaux auſſi: c'eſt pourquoy on aura cette Analogie, AC, AL :: BL, BC; & en diviſant on aura celle-cy, AL, CL :: BC, CL, où les deux conſequens étant égaux, les deux antecedens AL, BC, ſeront égaux auſſi; & ſi on les ôte des deux lignes égales AO, OB, il reſtera les deux égales OL, OC, ou RP, RD. Ce qu'il faloit demontrer. On demontrera de la même façon, que la perpendiculaire FQ, eſt diviſée en deux également au point S, par le même Axe HM. 17. & 18. Figures.

COROLLAIRE VI.

IL s'enſuit de plus, qui ſi au même Axe HM, on tire au dedans de l'Ellipſe autant de perpendiculaires que l'on voudra, comme FS, DR, leurs Quarrez ſeront proportionnels aux Rectangles HSM, HRM, ſous les parties correſpondantes de cét Axe HM. Car ſi l'on tire ſur l'autre Axe AB, des points D, F, les perpendiculaires CD, EF, on aura par la generation cette Analogie, AB, BG :: ACB, CDq; & ſi au lieu des deux premiers termes AB, BG, on met les deux ABq, HMq, qui ſont en même raiſon, à cauſe des trois proportionnelles AB, HM, BG, par *Coroll.* 4. ou ſi à la place de ces deux ABq, HMq, on met leurs quarts AOq, OMq, & qu'on permute, on aura cette autre Analogie, AOq, ACB :: OMq, CDq;

17. & 18. Figures. & si à la place du Rectangle A C B, on met la difference A O q - C O q, qui luy est égale, par 5. 2. & à la place du Quarré C D, le Quarré O R, qui luy est égal, par la nature des paralleles, on aura cette autre Analogie, A O q, A O q - C O q :: O M q, O R q; & en divisant on aura celle-cy, A O q, C O q :: O M q, O M q - O R q; & si à la place du Quarré C O, on met le Quarré D R, qui luy est égal, par la nature des paralleles, & à la place de la difference O M q - O R q, le Rectangle H R M, qui luy est égal, par 5. 2. & qu'on permute, on aura cette derniere Analogie, A O q, O M q :: D R q, H R M. On demontrera de la même façon, que A O q, O M q :: F S q, H S M; d'où il est aisé de conclure, que D R q, F S q :: H R M, H S M. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE VII.

ENFIN, il s'ensuit que le Parametre B G, étant perpendiculaire à l'Axe A B, ne rencontre l'Ellipse qu'au point B, parce que s'il la rencontroit encore en quelque autre point, comme en T, la perpendiculaire T V, que l'on tireroit de ce point T, sur l'autre Axe H M, seroit moindre que O B, par la generation, ce qui est impossible, parce que les deux lignes O B, T V, sont égales, à cause du Parallelograme O B T V. Il est donc impossible aussi, que le Parametre B G, rencontre l'Ellipse encore au point T. Ce qu'il faloit demontrer. On demontrera de la même façon, que si l'on tire à l'autre Axe H M, par l'une de ses extremitez H, M, une perpendiculaire, cette perpendiculaire ne rencontrera l'Ellipse qu'en la même extremité.

L'Analyse nous enseignera une construction de l'Ellipse

l'Ellipſe, qui ſera beaucoup plus facile que la precedente. Pour découvrir cette conſtruction, ſuppoſons que ſur le grand Axe A B, on ait décrit l'Ellipſe ADBH, dont le petit Axe ſoit H I, le centre ſoit O, & le Parametre du grand Axe A B, ſoit B G; & de plus, que la ligne C D, ſoit perpendiculaire au grand Axe A B. Suppoſons encore que ſur le même grand Axe A B, on ait déterminé les deux lignes égales O E, O F, en ſorte que ſi par quelque point de l'Ellipſe, comme D, on tire des deux points déterminez E, F, les droites D E, D F, leur ſomme D E † D F, ſoit toûjours égale à une même ligne donnée : car ainſi en décrivant de l'un de ces deux points comme de E, à une ouverture du compas un peu plus grande que A E, ou que B F, un arc de Cercle, & un autre de l'autre point F, à une ouverture du compas égale à l'excés de la ligne donnée ſur l'ouverture du premier arc, la Section de ces deux arcs donnera un point de l'Ellipſe; & l'on en pourra trouver de la même façon autant d'autres que l'on voudra, lorſqu'on aura une fois déterminé la longueur de la ligne donnée, & des deux lignes O E, O F, en ſorte que cette longueur ſoit invariable, & indépendante de la ligne indéterminée A C, ou B C; autrement cette même longueur ne pourroit pas ſervir pour trouver autant de points de l'Ellipſe qu'on voudroit. 19. Fig.

Pour donc déterminer la longueur de cette ligne, qui doit être donnée, & celle des lignes O E, O F, indépendamment de la ligne indéterminée A C, ou B C, & ſeulement par rapport à l'Axe A B, & à ſon Parametre B G, & à l'autre Axe H I, qui ſont invariables,

19. Fig. au lieu que AC, ou BC, peut changer en une infinité de manieres differentes dans la même Ellipſe; faiſons les ſuppoſitions ſuivantes:

$$AB \backsim d.$$
$$BG \backsim p.$$
$$HI \backsim f.$$
$$AC \backsim x.$$
$$CD \backsim y.$$
$$BF \backsim z \backsim AE.$$

pour avoir

$$BC \backsim d-x.$$
$$CF \backsim d-x-z.$$
$$OF \backsim \frac{1}{2}d-z \backsim OE;$$
$$CE \backsim x-z.$$
$$DE \backsim \sqrt{xx-2xz+zz+yy}$$
$$DF \backsim \sqrt{dd-2dx+xx-2dz+2xz+zz+yy}.$$

Pour connoître à quel Quarré on doit égaler le Quarré $xx-2xz+zz+yy$, de la ligne DE, en telle ſorte que les lignes égales OE, OF, ou bien AE, BF, ſoient invariables, & indépendantes de la partie indéterminée $AC \backsim x$, il ne faut pas que dans leur valeur, c'eſt-à-dire, dans la valeur qu'on trouvera de z, il demeure la lettre indéterminée x. Pour cette fin, il faut que dans ce Quarré les termes xx, yy, ſe rencontrent, afin que par l'antitheſe ils ſe détruiſent; car ainſi le reſte de l'Equation ſe pourra diviſer plus facilement par x; ce qui ſe doit faire, afin que cét x s'évanouïſſe, & qu'ainſi on puïſſe trouver la valeur de z, indépendamment de la lettre indéterminée x.

On ne peut pas prendre le Quarré $dd-2dx+xx-2dz+2xz+zz+yy$, de la ligne DF, où les Quarrez xx,

yy, ſe rencontrent, parce que cette ligne DF, eſt plus grande que la ligne DE, excepté dans le cas auquel le point D, convient avec le point H, ou avec le point I, parce qu'alors ces deux lignes DE, DF, ſeront égales, comme il eſt aiſé de demontrer. 19. Fig.

Puiſque donc la ligne DF, eſt trop grande pour pouvoir être égalée à la ligne DE, on la diminuëra de quelque quantité, comme de ω, en ſorte que la difference des lignes DE, DF, ſoit ω; & cette ligne ainſi diminuée, ſçavoir $\sqrt{dd-2dx+xx-2dz+2xz+zz+yy}-\omega$, pourra être égalée à la ligne DE $\sim \sqrt{xx-2xz+zz+yy}$. Ainſi on aura cette Equation, $\sqrt{dd-2dx+xx-2dz+2xz+zz+yy}-\omega \sim \sqrt{xx-2xz+zz+yy}$, où prenant le Quarré de chaque partie, on aura celle-cy, $dd-2dx+xx-2dz+2xz+zz+yy+\omega\omega-2\omega\sqrt{dd-2dx+xx-2xz+zz+yy} \sim xx-2xz+zz+yy$; & par l'antitheſe on aura celle-cy, $2\omega\sqrt{dd-2dx+xx-2xz+zz+yy} \sim 4xz-2dz-2dx+dd+\omega\omega$. Et pour diminuer le nombre des termes, mettez d à la place de ω, en ſuppoſant $\omega \sim d$, pour avoir cette autre Equation, $2d\sqrt{dd-2dx+xx-2xz+zz+yy} \sim 4xz-2dz-2dx+2dd$, dont chaque partie étant diviſée par 2, on aura celle-cy, $d\sqrt{dd-2dx+xx-2xz+zz-yy} \sim 2xz-dz-dx+dd$, où prenant le Quarré de chaque partie, on aura cette autre Equation $d^4-2d^3x+ddxx-2ddxz+ddzz+ddyy \sim 4xxzz-4dxzz+ddzz-4dxzz+ddzz-4xxdz+6ddxz+ddxx-2d^3z+d^4$, & par l'antitheſe on aura celle-cy, $4xxzz-4dxzz-4dxxz+4ddxz-ddyy \sim 0$; & ſi à la place de yy, on met $px-\frac{xx}{4}$, qui lui eſt égal, comme l'on connoît par l'Equation conſtitutive de l'Ellipſe, on aura cette autre Equation, $4xxzz-4dxzz-4dxxz+4ddxz-ddpx+dpxx \sim 0$, laquelle étant diviſée par $4xx-4dx$,

18. Fig. on aura cette derniere Equation, $zz - dz + \frac{1}{2}dp \sim 0$, dans laquelle on trouvera $z \sim \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}\sqrt{dd - dp}$. Et comme nous avons remarqué que le petit Axe H I, eſt moyen proportionnel entre le grand Axe A B, & ſon Parametre B G, on pourra mettre le Quarré ff, à la place du Rectangle dp, & l'on aura $z \sim \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}\sqrt{dd - ff}$, pour A E, & B F; c'eſt pourquoy on aura O E, ou O F $\sim \frac{1}{2}\sqrt{dd - ff}$.

Ce qui fait connoître que chacune des deux lignes égales O E, O F, eſt égale à la Racine quarrée de la difference des Quarrez des deux demi-Axes A O, O H. Ainſi les deux lignes invariables O E, O F, ſeront connuës, aprés quoy la quantité que nous avons ſuppoſée donnée, ſera auſſi connuë, parce qu'elle eſt égale au grand Axe A B, puiſque nous avons égalé la ligne D E, à la difference des lignes D F, & $\sim$, ou d, ou A B; ce qui fait que cette ligne A B, eſt égale à la ſomme des deux D E, D F.

Autre conſtruction. Mais, pour venir à la pratique, décrivez de l'une des deux extrémitez H, I, du petit Axe H I, comme de l'extrémité H, à l'ouverture du grand demi-Axe A O, ou B O, une circonference de Cercle, qui donnera ſur le grand Axe A B, les deux points invariables E, F, & déterminera par conſequent la longueur des lignes égales O E, O F. Car à cauſe de A B $\sim d$, on aura $\frac{1}{2}d$, pour chacune des lignes A O, B O, H E, H F; & à cauſe de H I $\sim f$, on aura $\frac{1}{2}f$, pour chacune des deux lignes H O, I O. Si du Quarré $\frac{1}{4}dd$, de H E $\sim \frac{1}{2}d$, on ôte le Quarré $\frac{1}{4}ff$, de H O $\sim \frac{1}{2}f$, il reſtera $\frac{1}{4}dd - \frac{1}{4}ff$ pour le Quarré de la ligne O E, ou O F, laquelle par conſequent vaudra $\sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{1}{4}ff}$, ou $\frac{1}{2}\sqrt{dd - ff}$, telle que nous l'avons trouvée.

Par le moyen de ces deux points invariables E, F, que nous appellerons *Foyers* de l'Ellipſe, on pourra trouver autant de points que l'on voudra de l'Ellipſe, comme vous allez voir à l'imitation du point D, qui ſe peut trouver par une même operation, en quatre lieux également éloignez du petit Axe HI, ou des deux extrémitez A, B, du grand Axe AB, en cette ſorte. *19. Fig.*

Ayant décrit de l'un des Foyers E, F, comme du Foyer E, avec une ouverture du Compas un peu plus grande que AE, ou que BF, un arc de Cercle, portez cette même ouverture ſur le grand Axe AB, depuis ſon extrémité A, en K, & avec l'ouverture du reſte BK, de l'Axe AB, décrivez de l'autre Foyer F, un autre arc de Cercle, & la rencontre de cét arc avec le premier, donnera le point D, qui ſera de l'Ellipſe.

Pour la demonſtration, décrivez du point D, par le Foyer E, le demi-Cercle LEQ, qui coupe icy l'Axe AB, en N, & la ligne DF, prolongée en Q, & en L; ce qui fait que comme par cette conſtruction la ſomme des lignes DE, DF, eſt égale au grand Axe AB, auſſi la ligne FQ, eſt égale au même Axe AB, à cauſe des trois lignes egales DE, DQ, DL; on voit auſſi, par 3. 3. que les lignes CE, CN, ſont égales entre elles, & que la ſomme des quatre lignes AO, EO, CO, DK, eſt égale à la ſomme des deux DF, CF, parce que ſi l'on diviſe FQ, en deux également au point K, la ſomme des deux AO, DK, ou FK, DK, vaut autant que DF. On connoît auſſi que FN, eſt double de CO, parce que ſi à EN + NO = FO, ou à 2CN + NO = FO, on ajoûte NO, *Demonſtration. 20. Fig.*

20. Fig. on aura 2CN † 2NO ∽ FN, ou 2CO ∽ FN. On connoît encore que FL, eſt double de DK, parce que ſi de KG ∽ KF, ou DG † DK ∽ KF, ou DL † DK ∽ KF, on ôte KL, il reſtera 2DK ∽ FL. Cherchez encore au grand Axe AB, & au petit HI, une troiſiéme proportionnelle BG, qui ſera le Parametre du grand Axe AB.

1. Cela étant ſuppoſé, on connoîtra premierement, par 5. 2. que AO *q* eſt égal à AEB † EO *q*, & à cauſe de AO *q* ∽ EI *q*, par la generation ; & de EI *q* ∽ EO *q* † OI *q*, par 47. 1. on aura EO *q* † OI *q* ∽ AEB † EO *q*; & ôtant EO *q*, il reſtera OI *q* ∽ AEB.

2. On connoîtra auſſi, par 36. 3. que le Rectangle QFL, eſt égal au Rectangle EFN, & que par conſequent on a cette Analogie, FQ, FE :: FN, FL; c'eſt pourquoy en prenant les moitiez de tous les termes, on aura cette ſeconde Analogie, AO, EO :: CO, DK; & en compoſant on aura celle-cy, AO, AO † EO :: CO, CO † DK ; & en permutant on aura celle-cy, AO, CO :: AO † EO, CO † DK; & en compoſant on aura celle-cy AO, AO † CO :: AO † EO, AO † EO † CO † DK ; & à cauſe de AO † CO, ou BO † CO ∽ BC, de AO † EO, ou BO † EO ∽ BE; & de AO † EO † CO † DK ∽ DF † CF, comme il a été demontré, on aura cette derniere Analogie, AO, BC :: BE, DF † CF.

3. Si dans la ſeconde Analogie, AO, EO :: CO, DK, on diviſe, on aura cette autre Analogie, AO, AO - EO :: CO, CO - DK; & en permutant on aura celle-cy, AO, CO :: AO - EO, CO - DK ; & en diviſant on aura celle-cy, AO, AO - CO :: AO - EO,

AO-EO-CO†DK ; & à cauſe de AO-CO ∽ AC, de AO-EO ∽ AE, & de AO-EO-CO† DK, ou FK-FO-CO†DK ∽ DF-CF, on aura cette derniere Analogie, AO, AC::AE, DF-CF. 20. Fig.

4. Si l'on compare cette derniere Analogie avec la derniere de l'article precedent, en faiſant des Rectangles ſous les termes homologues correſpondans dans chacune, comme vous voyez icy, on aura cette autre Analogie,

AO, BC::BE, DF†CF.
AO, AC::AE, DF-CF.

AO*q*, ACB::AEB, DF*q*-CF*q*.

AO*q*, ACB::AEB, DF*q*-CF*q*; & à cauſe de AEB ∽ OI*q*, par le premier article, & de DF*q*-CF*q* ∽ CD*q*, à cauſe du Triangle Rectangle DCF, on aura cette autre Analogie, AO*q*, ACB::OI*q*, CD*q*; & ſi à la place des deux antecedens AO*q*, OI*q*, on met les deux AB*q*, HI*q*, qui ſont en même raiſon, & qu'on permute, on aura cette autre Analogie, AB*q*, HI*q*:: ACB, CD*q*; & enfin, ſi au lieu des deux premiers termes, AB*q*, HI*q*, on met les deux AB, BG, qui ſont en même raiſon, à cauſe des trois proportionnelles AB, HI, BG, par la conſtruction, on aura cette derniere Analogie, AB, BG::ACB, CD*q*, qui fait connoître par la propriété generale, que le point D, eſt de l'Ellipſe. Ce qu'il faloit demontrer.

Lorſque le point C, conviendra avec le Foyer E, c'eſt-à-dire, lorſque la perpendiculaire CD, tombera ſur le Foyer E, le demi-Cercle QEL, ne coupera pas le grand Axe AB, & il ne fera que le toucher au même Foyer E. Neanmoins la demonſtration ſera

20. Fig. toûjours la même, ſi l'on met EO, à la place de CO, & le Quarré de la Touchante FE, à la place du Rectangle EFN.

DEFINITIONS.

1. GRAND *Axe* d'une Ellipſe, c'eſt une ligne droite, qui en repreſente la longueur.

2. *Petit Axe* d'une Ellipſe, c'eſt la ligne droite, qui en repreſente la largeur. Il eſt évident qu'une Ellipſe n'a que deux Axes, & que l'un eſt perpendiculaire à l'autre.

3. *Centre* d'une Ellipſe, c'eſt le point où les deux Axes de l'Ellipſe s'entrecoupent. Il eſt évident que les deux Axes s'entrecoupent en deux également.

4. *Foyers* d'une Ellipſe, ce ſont deux points marquez ſur le grand Axe de l'Ellipſe, & éloignez chacun des extrémitez du petit Axe d'une quantité égale à la moitié du grand. Il eſt évident que les deux Foyers ſont également éloignez du centre.

5. *Diametre* d'une Ellipſe, c'eſt une ligne droite tirée par le centre de l'Ellipſe, & terminée de côté & d'autre par la même Ellipſe. Il eſt évident qu'une Ellipſe a une infinité de Diametres differens, & que les deux Axes ſont des Diametres.

6. *Touchante* d'une Ellipſe, c'eſt une ligne droite, qui ne rencontre l'Ellipſe qu'en un point. Il eſt évident que les perpendiculaires aux deux Axes, tirées par les extrémitez des mêmes Axes, ſont des Touchantes.

7. *Ordonnée* à un Diametre d'une Ellipſe, c'eſt une ligne droite tirée au dedans de l'Ellipſe parallelement à la Touchante, qui paſſe par l'une des deux extrémitez de ce Diametre.

Deux Diametres conjuguez d'une Ellipſe, ſont deux Diametres tels, que les Ordonnées de l'un ſont reciproquement paralleles à l'autre Diametre. Il eſt évident que les deux Axes ſont deux Diametres conjuguez. 8. 19. Fig.

Parametre d'un Diametre d'une Ellipſe, c'eſt une ligne droite, qui eſt troiſiéme proportionnelle à ce Diametre & à ſon Diametre conjugué, auquel elle eſt parallele. 9.

Figure d'un Diametre d'une Ellipſe, c'eſt le Rectangle compris ſous ce Diametre & ſon Parametre. 10.

Perpendiculaire à une Ellipſe, c'eſt une ligne droite, laquelle coupant l'Ellipſe en un point, eſt perpendiculaire à la Touchante, qui paſſe par ce même point. 11.

PROPOSITION I.

Un Diametre d'une Ellipſe eſt diviſé en deux également par le centre.

IL eſt évident par la generation, que les deux Axes AB, HI, ſont diviſez en deux également par le centre O. Mais je dis qu'un autre Diametre, comme MP, eſt auſſi diviſé en deux également par le même centre O. 20. Fig.

Car, ſi les deux parties OM, OP, n'étoient pas égales, l'une ſeroit plus grande que l'autre : ſi c'étoit OM, on en pourroit retrancher ON, égale à la plus petite OP. Et ayant tiré des deux Foyers E, F, par les trois points M, N, P, les droites EN, FN, EP, FP, EM, FM, on fera la demonſtration en cette ſorte : *Demonſtration.* 21. Fig.

21. Fig. Les deux Triangles EOP, FON, étant égaux, par 4. 1. auſſi-bien que les deux EON, FOP, les baſes EP, FN, ſeront égales, auſſi-bien que les deux EN, FP; c'eſt pourquoy la ſomme des deux EN, FN, ſera égale à la ſomme des deux EP, FP; c'eſt-à-dire, par la generation, à la ſomme des deux EM, FM; ce qui étant impoſſible, par 21. 1. il eſt impoſſible auſſi que les deux parties OM, OP, ſoient inégales. Ce qu'il faloit demontrer.

PROPOSITION II.

Tirer une Touchante par un point donné ſur une Ellipſe donnée, dont le grand Axe & les deux Foyers ſont auſſi donnez.

PREMIEREMENT, ſi le point donné eſt en l'une des deux extrémitez de l'Axe donné, il n'y a qu'à tirer par ce point à l'Axe donné, une perpendiculaire, qui touchera l'Ellipſe donnée en ce même point, comme il a été demontré dans la generation.

22. Fig. Mais, ſi l'on donne le point ailleurs, comme en D, tirez de ce point D, aux deux Foyers E, F, les droites DE, DF; & ayant prolongé l'une de ces deux lignes, comme DE, vers Q, diviſez l'Angle FDQ, en deux également par la droite DG, qui touchera l'Ellipſe donnée AIBH, au point donné D, de ſorte qu'elle ne la rencontrera pas ailleurs qu'au point donné D.

Demonſtration. Car, ſi on veut qu'elle la rencontre encore en un point, comme P, en ſorte que P, ſoit de l'Ellipſe,

tirez de ce point P, aux Foyers E, F, les droites EP, FP, pour avoir EP + FP = AB, par la generation; & ayant fait DQ = DF, menez les droites PQ, FQ, pour avoir la ligne EQ, égale au grand Axe AB, ou par la generation à la somme des deux DE, DF, & le Triangle FDG, égal au Triangle GDQ, par 4. 1. ce qui fait que la ligne DG, divise la base FQ, du Triangle isoscele FDQ, à Angles droits, & en deux également au point G. 22 Fig.

Cela étant supposé, on connoît aisément que puisque la somme des lignes PE, PF, est égale par la generation au grand Axe AB, ou par la construction à la ligne EQ, & que PF, est égale à PQ, par 4. 1. à cause de l'egalité des deux Triangles rectangles PGF, PGQ, la somme des lignes PE, PQ, sera égale à la ligne EQ; ce qui étant impossible, par 20. 1. il est impossible aussi que la ligne DG, rencontre l'Ellipse ADB, ailleurs qu'au point D: c'est pourquoy par *Def. 6.* la ligne DG, sera une Touchante. Ce qu'il faloit faire & demontrer.

SCOLIE.

SI l'on divisoit l'Angle EDF, en deux également par la droite DL, cette droite DL, seroit perpendiculaire à l'Ellipse ADB, par *Def. 11.* parce qu'elle seroit perpendiculaire à la Touchante DG, puisqu'elle feroit avec elle des Angles égaux LDP, LDG, à cause des deux égaux EDP, FDG, & des deux égaux LDE, LDF.

COROLLAIRE.

ON voit aisément que la Touchante que l'on tireroit par cette méthode, par l'une des extrémitez H, I,

22. Fig. du petit Axe H I, ſeroit perpendiculaire au même Axe H I, ou parallele au grand Axe A B. Et comme la Touchante que l'on tireroit par quelque autre point, qui ne fût pas l'une des deux extrémitez A, B, du grand Axe A B, comme par le point D, rencontreroit neceſſairement en dehors celle qui paſſeroit par le point I, vers les points d'attouchement I, D, elle devroit auſſi rencontrer le grand Axe A B, qui eſt parallele à la Touchante I M, du point I, & par conſequent l'autre Axe H I, vers l'extrémité la plus proche du point d'attouchement.

Ainſi, vous voyez que les Touchantes, qui rencontrent l'Ellipſe en d'autres points qu'aux extrémitez A, I, B, H, des deux Axes A B, H I, coupent toûjours ces deux Axes en un point, que l'on peut trouver independamment de la méthode precedente, en cette ſorte:

Autre conſtruction.

23. Fig. Ayant tiré du point donné D, à l'Axe ſur lequel on veut trouver le point de la Touchante, comme ſur le grand Axe A B, la perpendiculaire C D, cherchez aux deux lignes O C, O B, une troiſiéme proportionnelle O R, qui donnera ſur le grand Axe A B, prolongé, le point R, qu'on cherche; de ſorte que ſi l'on tire de ce point R, au point donné D, la droite R D, cette droite R D, touchera l'Ellipſe A D B, au point donné D, & ne la rencontrera qu'en ce point D.

Demonſtration. Car, ſi on veut qu'elle la rencontre encore au point N, que l'on tire par ce point N, à l'Axe A B, la perpendiculaire N L; & ayant décrit du centre O, à l'entour du même Axe A B, le demi-Cercle A F B, prolongez l'Ordonnée C D, juſques au demi-Cercle en

F, & menez les droites AF, BF, OF, RF. Prolongez encore l'Ordonnée NL, jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite RF, en P, & le demi-Cercle AFB, en M. 23. Fig.

Puisque par la construction on a cette Analogie, OC, OB :: OB, OR, ou OC, OF :: OF, OR, le Triangle OFR, sera rectangle en F, parce qu'il sera semblable au Triangle OCF, rectangle en C; c'est pourquoy la ligne RF, touchera en F, le demi-Cercle AFB; ce qui fait que les points P, & M, sont differens, & que la ligne LP, est plus grande que la ligne LM.

Puisque par la generation on a cette Analogie AB, HI :: CF, CD, si au lieu des deux premiers termes AB, HI, on met les deux LM, LN, qui sont en même raison, par la generation, & à la place des deux derniers CF, CD, les deux LP, LN, qui sont en même raison, à cause des Triangles semblables RCF, RLP, on aura cette autre Analogie, LM, LN :: LP, LN, où l'on voit, que puisque les deux consequens sont égaux, les deux antecedens LM, LP, sont égaux aussi; ce qui étant impossible, il est impossible aussi, que la droite RD, rencontre l'Ellipse ADB, encore au point N. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE.

IL s'ensuit, que si on prolonge la Touchante RD, jusqu'à ce qu'elle coupe l'Axe HI, en quelque point, comme en S, & que du point d'attouchement D, on tire au même Axe HI, l'Ordonnée DT, les trois lignes OT, OI, OS, sont proportionnelles.

Car, puisque les trois lignes OC, OB, OR, sont

Demonſtration. 23. Fig. proportionnelles, par la conſtruction, on aura cette Analogie, OCq, OBq:: OC, OR; & ſi à la place de OCq, on met DTq, & AOq, à la place de OBq, on aura celle-cy, DTq, AOq:: OC, OR; & ſi à la place des deux premiers termes DTq, AOq, on met les deux HTI, OIq, qui ſont en même raiſon, par la generation; & à la place des deux derniers OC, OR, ou DT, OR, les deux TS, OS, qui ſont en même raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables, ROS, DTS; on aura cette autre Analogie, HTI, OIq:: TS, OS; & en diviſant on aura celle-cy, OIq-HTI, OIq:: OT, OS; & ſi au lieu du premier terme OIq-HTI, on met OTq, qui luy eſt égal, par 5. 2. & que l'on donne aux deux derniers termes OT, OS, la hauteur commune OT, on aura cette derniere Analogie, OTq, OIq:: OTq, OSOT, où l'on voit, que puiſque les antecedens ſont egaux, les conſequens OIq, OSOT, ſont égaux auſſi; & que par conſequent les trois lignes OT, OI, OS, ſont proportionnelles. Ce qu'il faloit demontrer.

Ainſi, vous voyez que quand les trois lignes OT, OI, OS, ou les trois OC, OB, OR, ſont proportionnelles, la ligne RS, eſt une Touchante; & reciproquement que quand la ligne RS, eſt une Touchante, les trois lignes OT, OI, OS, auſſi-bien que les trois OC, OB, OR, ſont proportionnelles. D'où il eſt aiſé de conclure, que l'on ne peut pas tirer deux Touchantes à une Ellipſe par un même point, parce que cette ſeconde Touchante donneroit une autre ligne que OR, qui ſeroit troiſiéme proportionnelle aux deux OC, OB, ou que OS, qui ſeroit troiſié-

me proportionnelle aux deux OT, OI; ce qui eſt impoſſible. D'où il ſuit que les proprietez de la Touchante d'une Ellipſe ſont reciproques. 13. Fig.

PROPOSITION III.

Si par l'une des extrémitez d'un Diametre d'une Ellipſe, on tire une Touchante, à laquelle on tire au dedans de l'Ellipſe une parallele quelconque, cette parallele ſera diviſée en deux également par le Diametre.

CETTE Propoſition eſt évidente par la generation, lorſque la Touchante paſſe par l'une des extrémitez d'un Axe: mais ſi elle n'y paſſe pas, en ſorte qu'elle rencontre au dehors de l'Ellipſe, l'un des deux Axes, comme DR, qui rencontre le grand Axe AB, au point R; je dis, que ſi à cette Touchante DR, on tire au dedans de l'Ellipſe ADB, une parallele quelconque PQ, en ſorte que neanmoins elle ne paſſe pas par le centre O, autrement la Propoſition ſeroit auſſi évidente, par *Prop. I.* cette parallele PQ, ſera diviſée en deux également au point K, par le Diametre DM, qui paſſe par le point d'attouchement D. 14. Fig.

Pour la demonſtration, prolongez l'Ordonnée PQ, juſqu'à ce qu'elle coupe le même Axe AB, en E; & ayant tiré des trois points P, D, Q, à cét Axe AB, les Ordonnées PN, DC, QL, tirez par le point B, à la Touchante DR, la parallele BG, & joignez les droites BD, CG. Tirez encore par le point B, la Touchante BF, qui rencontre le Diametre DM, pro- *Demonſtration.*

24. Fig. longé en F; & ayant prolongé l'Ordonnée QL, juſqu'à ce qu'elle coupe le même Diametre DM, en T, menez la droite RF.

1. Cette preparation étant faite, on aura dans les Triangles ſemblables OGB, ODR, cette Analogie, OG, OD :: OB, OR; & ſi à la place des deux derniers termes OB, OR, on met les deux OC, OB, qui ſont en même raiſon, par la Propoſition precedente, ou bien à la place de ces deux OC, OB, les deux OD, OF, qui ſont en même raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables OCD, OBF, on aura cette autre Analogie, OG, OD :: OD, OF, qui fait connoître que les trois lignes BD, CG, FR, ſont paralleles. D'où il ſuit, que les deux Triangles BDF, BDR, qui ſont ſur la même baſe BD, & entre les mêmes paralleles BD, FR, ſont égaux, par 37. 1. c'eſt pourquoy ſi à chacun on ajoûte le Triangle BCD, on aura le Triangle CDR, égal au Trapeze BCDF.

2. Parce que les deux Triangles OBF, ONS, ſont ſemblables, on aura cette Analogie, OBq, ONq :: OBF, ONS, & en diviſant on aura celle-cy, OBq - ONq, OBq :: NBFS, OBF; & ſi à la place du premier terme OBq - ONq, on met le Rectangle ANB, qui luy eſt égal, par 5. 2. & qu'on permute, on aura cette derniere Analogie, ANB, NBFS :: OBq, OBF. Pareillement à cauſe des Triangles ſemblables OBF, OCD, on a cette Analogie, OBq, OCq :: OBF, OCD, & en diviſant on aura celle-cy, OBq - OCq, OBq :: CBFD, OBF; & ſi à la place du premier terme OBq - OCq, on met le Rectangle ACB, qui luy eſt égal, par 5. 2. & qu'on permute, on

on aura cette autre Analogie, ACB, CBFD :: OBq, OBF; & si à la place des deux derniers termes, OBq, OBF, on met les deux ANB, NBFS, qui sont en même raison, comme vous avez vû dans la derniere Analogie precedente, on aura cette derniere Analogie, ACB, CBFD :: ANB, NBFS. Enfin à cause des deux Triangles semblables OBF, OLT, on a cette Analogie, OBq, OLq :: OBF, OLT; & en divisant on aura celle-cy, OBq - OLq, OBq :: LBFT, OBF; & si au lieu du premier terme OBq - OLq, on met le Rectangle ALB, qui luy est égal, par 5. 2. & qu'on permute, on aura cette autre Analogie, ALB, LBFT :: OBq, OBF; & si à la place des deux derniers termes OBq, OBF, on met les deux ACB, CBFD, qui sont en même raison, comme vous avez vû, on aura cette derniere Analogie, ALB, LBFT :: ACB, CBFD. 24. fig.

Dans les Triangles semblables DCR, PNE, on a cette Analogie, DCR, PNE :: CDq, PNq; & si à la place des deux derniers termes CDq, PNq, on met les deux ACB, ANB, qui sont en même raison, par la generation, on aura cette autre Analogie, DCR, PNE :: ACB, ANB; & encore, si au lieu des deux derniers termes ACB, ANB, on met les deux CBFD, NBFS, qui sont en même raison, par l'article precedent, on aura cette derniere Analogie, DCR, PNE :: CBFD, NBFS, où l'on voit, que puisque les antecedens DCR, CBFD, sont égaux par le premier article, les deux consequens PNE, NBFS, sont égaux aussi. De même dans les Triangles semblables DCR, QLE, on a cette Analogie, 3.

24. Fig. DCR, QLE::CDq, QLq; & ſi à la place des deux derniers termes CDq, QLq, on met les deux ACB, ALB, qui ſont en meſme raiſon, par la generation, ou à la place des deux ACB, ALB, les deux CBFD, LBFT, qui ſont en meſme raiſon par l'article precedent, on aura cette derniere Analogie, DCR, QLE::CBFD, LBFT, où l'on voit, que puiſque les deux antecedens DCR, CBFD, ſont egaux, les deux conſequens QLE, LBFT, ſont egaux auſſi.

4. Puiſque le Triangle QLE, eſt égal au Trapeze LBFT, comme il vient d'être demontre, ſi on ajoûte à chacun le Plan SNLQK, on aura la ſomme NSKE égale à la ſomme LBFT † SNLQK; & ſi on oſte la premiere NSKE, du Triangle PNE, & la ſeconde LBFT † SNLQK, du Trapeze NBFS, égal au Triangle PNE, par l'article precedent, il reſtera le Triangle PKS, égal au Triangle TKQ; & comme ces deux Triangles ſont ſemblables, leurs côtez homologues KP, KQ, ſeront égaux. Ce qu'il faloit demontrer.

25. Fig. Si le point S, tombe au delà du centre O, au deſſous de l'Axe AB, les trois premiers articles ſeront les mêmes qu'auparavant, pourvû que l'on change le Plan NBFS, en cette difference OBF-ONS, telle qu'elle vient par la diviſion de raiſons, qui a été faite dans le ſecond article. Mettant donc la difference OBF-ONS, à la place du Plan NBFS, au lieu que le Triangle PNE, a été trouvé dans le troiſiéme article, égal au Trapeze NBFS, on le trouvera égal à la difference OBF-ONS, aprés quoy le quatriéme article ſe changera en celuy-cy.

Parce que le Triangle QLE, eſt égal au Trapeze LBFT, ſi on ajoûte à chacun la difference OLQK-ONS, on aura la ſomme OKE-ONS, égale à la ſomme LBFT†OLQK-ONS; & ſi on oſte la premiere OKE-ONS, du Triangle PNE, & la ſeconde LBFT† OLQK-ONS, de la difference OBF-ONS, égale au Triangle PNE, il reſtera le Triangle PKS, égal au Triangle TKQ, comme auparavant. 4. 25. Fig.

Si le même point S, convient avec le centre O, en ſorte que les trois points O, N, S, n'en faſſent qu'un, auquel cas le Triangle ONS, s'évanouït, la demonſtration ſera la même, pourvû que l'on change le Triangle PNE, au Triangle POE, le Trapeze NBFS, au Triangle OBF, lequel par conſequent ſera égal au Triangle POE, le Plan SNLQK, au Plan OLQK, & le Triangle PKS, au Triangle PKO, lequel on trouvera égal au Triangle KQT, par des raiſonnemens ſemblables aux precedens. 26. Fig.

Enfin, ſi l'Ordonnée PN, coupe le Diametre DM, en ſon extrémité M, en ſorte que le point S, convienne avec le point M, auquel cas le point E, tombera au dedans de l'Ellipſe, le Triangle ONS, ſe changera au Triangle OMN; & au lieu que nous avions le Triangle PNE, égal à la difference OBF-ONS, on l'aura égal à la difference OBF-OMN, aprés quoy le quatriéme article ſe changera en celuy-cy. 27. Fig.

Parce que le Triangle QLE, eſt égal au Plan LBFT; ſi à chacun on ajoûte le Plan KELT, on aura le Triangle KTQ, égal au Trapeze KEBF; & 4.

27. Fig. parce que le Triangle PNE, eſt égal à la difference OBF-OMN, ſi de chacun on oſte la difference OKE-OMN, on aura le Triangle MKP, égal au même Trapeze KEBF. D'où il ſuit, que les Triangles MKP, KTQ, ſont égaux entre eux; & comme ils ſont ſemblables, leurs côtez homologues KP, KQ, ſeront auſſi égaux entre eux. Ce qu'il faloit demontrer.

28. Fig. Il peut arriver que le point Q, tombe à l'extrémité B, de l'Axe AB, en ſorte que les quatre points Q, L, E, B, n'en faſſent qu'un, auquel cas le point G, convient avec le point Q, & le Triangle QLE, s'évanouït, auſſi-bien que le Trapeze LBET, & le Triangle PNE, ſe change au Triangle PNB, en quelque lieu que tombe le point S; & s'il tombe entre le centre O, & le point d'attouchement D, le Trapeze NBFS, ſera toûjours égal au Triangle PNB, & le Plan SNLQK, ſe changera au Plan SNBK, lequel étant oſté du Triangle PNB, & du Trapeze NBFS, qui ſont égaux, il reſtera le Triangle PKS, égal au Triangle BKF; & par conſequent le côté KP, égal au côté KB. Ce qu'il faloit demontrer.

29. Fig. Si dans le même cas le point S, convient avec le centre O, en ſorte que le Triangle ONS, s'évanouïſſe, au lieu du Triangle PNB, égal au Trapeze NBFS, on aura le Triangle POB, égal au Triangle OBF, ce qui rend égales les deux perpendiculaires OP, BF; & ſi de chacun de ces deux Triangles égaux POB, OBF, on oſte le Triangle OKB, il reſtera le Triangle PKO, égal au Triangle BKF; & par conſequent le côté KP, égal au côté KB, comme auparavant.

Mais, si dans le même cas, le point S, tombe entre le centre O, & l'extrémité M, du Diametre DM, on connoîtra par ce qui a été dit dans la *Fig. 25* que Triangle PNB, est égal à la difference OBF-ONS; c'est pourquoy, si de chacun on oste la difference OBK-ONS, il restera le Triangle PSK, égal au Triangle BFK; & par consequent le côté KP, égal au côté KB, comme auparavant. *30. Fig.*

COROLLAIRE.

IL est évident, que si à la Touchante DR, qui passe par l'extrémité D, du Diametre DM, on tire une parallele MI, par l'autre extrémité M, cette parallele MI, touchera l'Ellipse ADB, au même point M. D'où l'on conclut aisément, que les Touchantes tirées par les deux extrémitez d'un Diametre d'une Ellipse, sont paralleles entre elles.

PROPOSITION IV.

Le Quarré d'une Ordonnée à un Diametre d'une Ellipse, est au Rectangle sous les parties correspondantes de ce Diametre, comme le Quarré d'un autre Diametre parallele à l'Ordonnée, au Quarré du premier Diametre.

CETTE Proposition est évidente par la generation, lorsque les deux Diametres sont des Axes: mais dans un autre cas, je dis que le Quarré de l'Ordonnée PK, ou QK, au Diametre DM, est au rectangle MKD, sous les parties correspondantes KD, KM, de ce Diametre DM, comme le Quarré du *24. Fig.*

24. Fig. Diametre H Z, parallele à l'Ordonnée P K, ou à la Toûchante D R, au Quarré du premier Diametre D M.

Demonſtration. Pour la Demonſtration, faites une preparation comme dans la Propoſition precedente ; & de plus, tirez par l'extrémité Z, du Diametre H Z, à la Touchante B F, la parallele Z I, qui coupe icy le grand Axe A B, en V, & le Diametre D M, prolongé en I.

1. Parce que les deux Triangles B D F, B D R, ſont égaux, par la Propoſition precedente, ſi on ajoûte à chacun le Triangle O D B, on aura le Triangle O B F, égal au Triangle O D R.

2. Parce que le Triangle Q L E, eſt égal au Trapeze L B F T, par la Propoſition precedente, ſi on ajoûte à chacun le Trapeze O L Q K, on aura la ſomme L B F T † O L Q K, égale à la ſomme Q L E † O L Q K ; & ſi on oſte la premiere L B F T † O L Q K, du Triangle O B F, & la ſeconde Q L E † O L Q K, du Triangle O D R, égal au Triangle O B F, par l'article precedent, on aura le Triangle K Q T, égal au Trapeze K D R E.

3. Parce que les deux Triangles O B F, O V I, ſont ſemblables, on aura cette Analogie, O B q, O V q :: O B F, O V I ; & en diviſant on aura celle-cy, O B q - O V q, O B q :: V B F I, O B F ; & ſi à la place du premier terme O B q - O V q, on met le Rectangle A V B, qui luy eſt égal, par 5. 2. & qu'on permute, on aura cette autre Analogie, A V B, V B F I :: O B q, O B F ; & ſi à la place des deux derniers termes, O B q, O B F, on met les deux A C B, C B F D, qui ſont en même raiſon, par la Propoſition precedente, & qu'on

permute, on aura cette autre Analogie, AVB, ACB :: VBFI, CBFD ; & ſi au lieu des deux premiers termes AVB, ACB, on met les deux ZVq, CDq, qui ſont en même raiſon, par la generation, ou à la place de ces deux Quarrez les deux Triangles OVZ, CDR, qui ſont en même raiſon, parce qu'ils ſont ſemblables, on aura cette derniere Analogie, OVZ, CDR :: VBFI, CBFD, où l'on voit, que puiſque les deux conſequens CDR, CBFD, ſont égaux par la Propoſition precedente, les deux antecedens OVZ, VBFI, ſont égaux auſſi. 24. Fig.

Puiſque donc le Triangle OVZ, eſt égal au Trapeze VBFI, ſi on ajoûte à chacun le Triangle OVI, on aura le Triangle OZI, égal au Triangle OBF, & par conſequent au Triangle ODR, qui a été demontré égal au Triangle OBF, dans le premier article. 4.

Dans les Triangles ſemblables KQT, OZI, on a cette Analogie, KQT, OZI :: KQq, OZq ; & ſi à la place du Triangle KQT, on met le Trapeze KDRE, qui luy eſt égal par le ſecond article ; & à la place du Triangle OZI, le Triangle ODR, qui luy eſt égal par l'article precedent, on aura cette autre Analogie, KDRE, ODR :: QKq, OZq. 5.

Enfin, dans les Triangles ſemblables ODR, OKE, on a cette Analogie, OKE, ODR :: OKq, ODq ; & en diviſant on aura celle-cy, KDRE, ODR :: ODq + OKq, ODq ; & ſi au lieu du troiſiéme terme ODq - OKq, on met le Rectangle MKD, qui luy eſt égal, par 5. 2. & que l'on permute, on aura cette autre Analogie, KDRE, MKD :: ODR, 6.

24. Fig. O D q ; & encore si à la place des deux antecedens K D R E, O D R, on met les deux Quarrez Q K, O Z, qui sont en même raison, par l'article precedent, on aura celle-cy, Q K q, M K D :: O Z q, O D q; & enfin, si à la place des deux côtez O Z, O D, on met leurs doubles H Z, D M, on aura cette derniere Analogie, Q K q, M K D :: H Z q, D M q. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE.

IL suit de cette Proposition, que si l'on tire à un même Diametre d'une Ellipse, plusieurs Ordonnées, leurs Quarrez seront proportionnels aux Rectangles sous les parties correspondantes de ce Diametre, puisque chaque Rectangle est au Quarré de l'Ordonnée correspondante, comme le Quarré du même Diametre au Quarré de l'autre Diametre parallele à l'Ordonnée, lequel est conjugué au premier, comme nous demontrerons dans la Proposition suivante.

PROPOSITION V.

Si à une Ordonnée d'un Diametre d'une Ellipse, on tire un autre Diametre parallele, ces deux Diametres seront conjuguez.

31. Fig. JE dis, que si à l'Ordonnée P Q, du Diametre D M, on tire un autre Diametre parallele H Z, ces deux Diametres D M, H Z, seront conjuguez l'un à l'autre; c'est-à-dire, que les Ordonnées du Diametre D M, comme P Q, seront paralleles à l'autre Diametre H Z, comme il est évident par la supposition, & reciproquement

quement les Ordonnées du Diametre H Z, comme N S, ſeront paralleles au Diametre D M, comme nous allons demontrer. *31. Fig.*

Car, puiſque l'on ſuppoſe que la ligne N S, eſt une Ordonnée au Diametre H Z, elle doit par *Def.* 7. être parallele aux Touchantes H E, Z F, qui paſſent par les extrémitez H, Z, & par conſequent au Diametre D M, qui eſt auſſi parallele aux Touchantes H E, Z F, parce qu'il eſt une Ordonnée au Diametre H Z, tirée par le centre O. *Demonſtration.*

Mais, pour demontrer que D M, eſt une Ordonnée au Diametre H Z, ou parallele aux Touchantes H E, Z F, il faut demontrer que la ligne N S, que je ſuppoſe parallele au Diametre D M, eſt diviſée en deux également au point T, par l'autre Diametre H Z, pour conclure enſuite, comme dans la *Prop. III.* que les lignes H E, Z F, paralleles aux deux D M, N S, touchent l'Ellipſe aux points H, Z, & que par conſequent ces deux lignes D M, N S, ſont des Ordonnées au Diametre H Z.

Ayant tiré des points S, N, au Diametre D M, les Ordonnées S L, N G, qui ſeront égales, on aura par le Corollaire de la Propoſition precedente, cette Analogie, N G q, M G D :: S L q, M L D, où l'on voit, que puiſque les antecedens N G q, S L q, ſont égaux, les deux conſequens M G D, M L D, ſont égaux auſſi, & que par conſequent on a cette Analogie, M G, M L :: D L, D G; c'eſt pourquoy en diviſant, on aura celle-cy, M L, G L :: D G, G L, où l'on voit, que puiſque les conſequens ſont égaux, les antecedens M L, D G, ſont égaux auſſi; & ſi on les oſte

a. Fig. des deux lignes égales O M, O D, il reſtera les deux égales O L, O G, ou T S, T N. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE.

SI au Diametre D M, & à ſon conjugué H Z, on cherche une troiſiéme proportionnelle, elle repreſentera le Parametre de ce Diametre D M, par *Def. 9.* & il ſera aiſé de conclure par ce qui a été demontré dans la *Prop. IV.* que le Rectangle M G D, eſt au Quarré de l'Ordonnée correſpondante N G, comme le Diametre D M, à ſon Parametre : & pareillement, ſi au Diametre H Z, & à ſon conjugué D M, on trouve une troiſiéme proportionnelle, elle ſera le Parametre de ce Diametre H Z ; & l'on connoîtra de la meſme façon, que le Rectangle H T Z, eſt au Quarré de l'Ordonnée correſpondante S T, comme le Diametre H Z, à ſon Parametre. Ainſi, vous voyez que dans une Ellipſe, le Rectangle, ſous les parties d'un Diametre quelconque, eſt au Quarré de ſon Ordonnée correſpondante, comme le même Diametre à ſon Parametre ; & conſequemment, comme le Quarré de ce Diametre au Quarré de ſon Diametre conjugué : & que par conſequent les Quarrez des Ordonnées à un meſme Diametre ſont proportionnels aux Rectangles, ſous les parties correſpondantes de ce Diametre, comme il a été démontré à l'égard des Axes.

PROPOSITION VI.

Le Quarré d'une Ordonnée à un Diametre d'une Ellipſe eſt égal à l'excés du Rectangle ſous le Parametre, & la partie du même Diametre compriſe entre l'Ordonnée & l'Ellipſe, ſur un Rectangle ſemblable, & ſemblablement poſé à la Figure du même Diametre, & ayant pour baſe la même partie.

SUPPOSONS premierement que le Diametre AB, ſoit un Axe, ſi l'on fait ſous l'Axe AB, & ſon Parametre BG, la figure du même Axe AB, ſçavoir le Rectangle ABGN, & qu'on prolonge une Ordonnée quelconque à l'Axe AB, comme CD, juſques en L, & que par le point K, où elle coupe la Diagonale AG, on tire à l'Axe AB, la parallele KM, laquelle retranchera du Rectangle CBGL, le Rectangle KMGL, ſemblable & ſemblablement poſé au grand, ou à la Figure ABGN, par 24. 6. 32. Fig.

Je dis, que le Quarré de cette Ordonnée CD, eſt égal à l'excés ou au Rectangle BCKM, du Rectangle CBGL, ſous le Parametre BG, & la partie interceptée BC, ſur le Rectangle KMGL, ſemblable & ſemblablement poſé à la Figure ABGN, & ayant pour baſe la ligne KM, égale à la même partie interceptée BC.

Car, puiſque par la generation, on a cette Analogie, AB, BG :: ACB, CDq, ſi à la place des deux premiers termes AB, BG, on met les deux AC, CK, *Demonſtration.*

32. Fig. qui ſont en même raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables ABG, ACK, on aura cette autre Analogie, AC, CK :: ACB, CDq; & ſi aux deux premiers termes AC, CK, on donne la hauteur commune CB, on aura cette derniere Analogie, ACB, BCK :: ACB, CDq, où l'on voit, que puiſque les deux antecedens ſont égaux, les deux conſequens BCK, CDq, ſont égaux auſſi. Ce qu'il faloit demontrer.

33. Fig. La demonſtration ſera la même, lorſque le Diametre AB, ne ſera pas un Axe, pourvû que l'on change tant ſoit peu la conſtruction ; parce que l'Ordonnée CD, n'étant plus perpendiculaire au Diametre AB, au lieu de la prolonger, comme il a été fait auparavant, il faut tirer du point C, au Diametre AB, la perpendiculaire CL, & faire un raiſonnement ſemblable au precedent.

SCOLIE.

LE Quarré de l'Ordonnée CD, eſt égal dans la *Parabole* au Rectangle CBGL ; & comme il eſt moindre dans l'*Ellipſe*, que ce Rectangle CBGL, du Rectangle KMGL, puiſqu'il a été demontré égal au Rectangle CBMK, cela a donné le nom d'*Ellipſe* à la Courbe AIBH.

32. & 33 Fig. Si l'on ſuppoſe AB $\backsim d$, BG $\backsim p$, BC $\backsim x$, & CD $\backsim y$, on aura AC $\backsim d-x$, MG $\backsim \frac{}{}$, à cauſe des Triangles ſemblables ABG, KMG ; & ſi l'on oſte MG $\backsim \frac{}{}$, de BG $\backsim p$, il reſtera BM $\backsim p-\frac{}{}$, laquelle étant multipliée par BC $\backsim x$, on aura $px-\frac{}{}$, pour le Rectangle CBMK, ou pour le Quarré yy, de l'Ordonnée CD $\backsim y$. Ainſi on a cette Equation conſtitutive, $yy \backsim px-\frac{}{}$, telle que nous l'avons trouvée dans la proprieté generale.

PROPOSITION VII.

Si l'on tire au dedans d'une Ellipſe, à deux Diametres conjuguez, deux paralleles, qui ſe coupent au dedans de la même Ellipſe; le Rectangle ſous les parties de l'une ſera au Rectangle ſous les parties de l'autre, comme le Quarré du Diametre parallele à la premiere, au Quarré du Diametre parallele à la deuxiéme.

JE dis, que ſi aux deux Diametres conjuguez DM, HZ, on tire au dedans de l'Ellipſe A D B, les deux paralleles N S, P Q, qui ſe coupent au dedans de la même Ellipſe ADB, au point V, le Rectangle QVP, eſt au Rectangle N V S, comme le Quarré du Diametre H Z, au Quarré du Diametre D M. 31. Fig.

Ayant tiré des deux points N, S, au Diametre DM, les Ordonnées N G, S L, elles ſeront paralleles à l'autre Diametre H Z, par *Def.* 8. & les deux lignes O G, O L, ſeront égales, par *Prop. V.* & à cauſe de MKD ∽ MO*q*-OK*q*, & de MGD ∽ MO*q*-OG*q*, par 5. 2. on aura MKD-MGD ∽ OG*q*-OK*q*; & encore à cauſe de O G *q*-OK*q* ∽ G K L, par 5. 2. on aura M K D-M G D ∽ G K L. Demonſtration.

Puiſque par *Prop. V.* on a cette Analogie, G N*q*, K Q*q*:: M G D, M K D, ou K V*q*, K Q*q*:: M G D, M K D; en diviſant on aura celle-cy, Q K*q*-K V*q*, Q K*q*:: M K D-M G D, M K D; & ſi au lieu du premier terme Q K*q*-K V*q*, on met le Rectangle Q V P,

31. Fig. qui luy eſt égal, par 5. 2. & à la place du troiſiéme MKD-MGD, le Rectangle GKL, ou NVS, qui luy a eſté demontré égal, on aura cette autre Analogie, QVP, QKq :: NVS, MKD, & en permutant on aura celle-cy, QVP, NVS :: QKq, MKD; & ſi au lieu des deux derniers termes QKq, MKD, on met les deux HZq, DMq, qui ſont en même raiſon, par *Prop V.* on aura cette derniere Analogie, QVP, NVS :: HZq, DMq. Ce qu'il faloit demontrer.

PROPOSITION VIII.

Si l'on tire au dedans d'une Ellipſe à deux Diametres conjuguez, deux lignes paralleles, qui ſe coupent au dehors de la même Ellipſe, le Rectangle ſous toute une ligne & ſa partie exterieure, ſera au Rectangle ſous toute l'autre ligne & ſa partie exterieure, comme le Quarré du Diametre parallele à la premiere ligne, au Quarré du Diametre parallele à la ſeconde.

34. Fig. JE dis, que ſi aux deux Diametres conjuguez DM, HZ, on tire au dedans de l'Ellipſe MHD, les deux paralleles NS, PQ, qui ſe coupent au dehors de la même Ellipſe MHD, au point V, le Rectangle QVP, eſt au Rectangle NVS, comme le Quarré du Diametre HZ, au Quarré du Diametre DM.

Demonſtration. Ayant tiré des deux points N, S, au Diametre DM, les Ordonnées NG, SL, elles ſeront paralleles à l'autre Diametre HZ, par *Def. 8.* & les deux lignes OG, OL, ſeront égales, par *Prop. V.* & à cauſe de

MKD ∽ MOKq-OKq, & de MGD ∽ MOq-OGq, par 5. 2. on aura MGD-MKD ∽ OKq-OGq; & encore à cauſe de OKq-OGq ∽ GKL, par 6. 2. on aura MGD-MKD ∽ GKL. 34. Fig.

Puiſque par *Prop. V.* on a cette Analogie, GNq, QKq::MGD, MKD, ou KVq, QKq::MGD, MKD, en diviſant on aura celle-cy, KVq-QKq, QKq::MGD-MKD, MKD; & ſi au lieu du premier terme KVq-QKq, on met ſon égal QVP, par 6. 2. & au lieu du troiſiéme MGD-MKD, ſon égal GKL, ou NVS, on aura cette autre Analogie, QVP, QKq::NVS, MKD; & en permutant on aura celle-cy, QVP, NVS::QKq, MKD; & ſi à la place des deux derniers termes QKq, MKD, on met les deux HZq, DMq, qui ſont en même raiſon, par *Prop. V* on aura cette derniere Analogie, QVP, NVS::HZq, DMq. Ce qu'il faloit demontrer.

PROPOSITION IX.

Si on coupe un Cone par un Plan, lequel étant perpendiculaire à la baſe du Triangle de l'Axe, retranche de ce même Triangle un autre Triangle diſſemblable; la Section ſera une Ellipſe.

JE dis, que ſi on coupe le Cone ABCD, dont la baſe eſt le Cercle ADC, & le Triangle de l'Axe eſt ABC, par un Plan, qui ſoit perpendiculaire à la baſe AC, du Triangle de l'Axe ABC, en ſorte que coupant les deux côtez AB, BC, du Triangle de l'Axe ABC, au dedans du Cone ABCD, aux deux points L, N, 35. Fig.

35. Fig. il retranche du meſme Triangle de l'Axe A B C, le petit Triangle diſſemblable B L N, dont la baſe L N, eſt la commune Section de ce Plan, & du Triangle de l'Axe A B C ; la Section L P N Q, de ce même Plan & du Cone A B C D, eſt une Ellipſe, ſçavoir une Figure, où les Quarrez des Ordonnées à un Diametre, ſont proportionnels aux Rectangles ſous les parties correſpondantes de ce même Diametre.

Demonſtration. Pour la demonſtration, que l'on coupe le Cone ABCD, par un Plan, qui paſſant entre les extrémitez L, N, de la ligne L N, que l'on nomme *Diametre de Section*, ſoit parallele à la baſe A D C, du Cone ABCD, pour avoir par cette Section le Cercle R P S Q, dont le Diametre R S, étant la commune Section de ce Plan & du Triangle de l'Axe A B C, ſera parallele au Diametre A C, de la baſe A D C, du Cone A B C D.

Que l'on coupe encore le Cone A B C D, par un Plan, qui paſſant par les mêmes extrémitez L, N, du Diametre L N, ſoit parallele à la même baſe A D C, du Cone A B C D, pour avoir par cette ſeconde Section le Cercle F I G K, dont le Diametre F G, eſtant la commune Section de ce Plan & du Triangle de l'Axe A B C, ſera parallele au Diametre A C, de la baſe A D C, du Cone A B C D ; & par conſequent au Diametre R S.

Enfin, tirez par les points oppoſez I, K, où la Section L P N K, ſe trouve coupée par le Cercle F I G K, la droite I K, qui ſera diviſée à Angles droits, & en deux également, par la droite L N, au point H, qui eſt la Section des deux lignes F G, L N, & pareillement par les points oppoſez P, Q, où la même Section

ction L B N Q, ſe trouve coupée par le Cercle R P S Q, 35. Fig.
la droite P Q, qui ſera auſſi coupée à Angles droits, & en deux également, par le Diametre L N, au point O, où les deux Diametres R S, L N, s'entrecoupent. D'où il ſuit, que les deux lignes H I, O P, ſont des Ordonnées au Diametre L N, qui ſera un Axe.

Cela étant ſuppoſé, on aura dans les Triangles ſemblables F H N, R O N, cette Analogie, F H, R O :: N H, N O ; & dans les ſemblables G H L, S O L, on aura celle-cy, G H, O S :: L H, L O ; & ſi des termes homologues de ces deux Analogies, on en forme des Rectangles, comme vous voyez icy,

F H, R O :: N H, N O.
G H, O S :: L H, L O.
F H G, R O S :: L H N, L O N.

on aura cette troiſiéme Analogie, F H G, R O S :: L H N, L O N ; & ſi au lieu des deux premiers termes F H G, R O S, on met les deux Quarrez H I, O P, qui leur ſont égaux, par 35. 3. on aura cette derniere Analogie, H I q, O P q :: L H N, L O N, qui fait connoître que la Section L P N Q, eſt une Ellipſe. Ce qu'il faloit demontrer.

Nous avons dit, que les deux lignes I K, P Q, ſont coupées également, & à Angles droits, aux points H, O, par l'Axe L N ; ce qui eſt évident, parce que ſi on prolongeoit le Plan L P N Q, juſqu'à ce qu'il rencontrât la baſe A D C, auſſi prolongée, il la couperoit par une ligne perpendiculaire au Diametre A C, puiſque le Plan L P N Q, eſt ſuppoſé perpendiculaire à ce Diametre : c'eſt pourquoy les deux lignes I K, P Q, étant paralleles à cette même

54. Fig. ligne, puiſque ces trois lignes ſont les Sections du Plan L P N Q, par les trois Plans paralleles A D C, R Q S, F K G, ces deux mêmes lignes I K, P Q, ſeront auſſi perpendiculaires au Diametre A C, & par conſequent aux deux F G, R S, qui les diviſeront en deux également aux points H, O, par 3. 3. & parce que cette même ligne eſt auſſi perpendiculaire à l'Axe L N, ſes paralleles I K, P Q, ſeront auſſi perpendiculaires au même Axe L N, &c.

DE L'HYPERBOLE.

Generation de l'Hyperbole.

SIL y a ſur un Plan un Angle quelconque ABG, dont les deux lignes AB, BG, ſoient determinées, je dis que l'on peut trouver ſur le même Plan une infinité de points d'une Hyperbole, dont un Diametre determiné ſera AB, & le Parametre de ce Diametre ſera BG, en ſorte que la raiſon du Quarré d'une Ordonnée à ce Diametre AB, prolongé, comme de CD, au Rectangle correſpondant ACB, ſoit égale à celle du Parametre BG, au même Diametre AB, telle qu'eſt la proprieté de la courbe que nous avons appellée *Hyperbole*; ſçavoir en cherchant au Diametre AB, à ſon Parametre BG, & au Rectangle ACB, un Quarré proportionnel, dont le côté CD, étant placé de côté & d'autre parallelement au Parametre BG, on aura en D, deux points de l'Hyperbole: & pareillement en cherchant au Diametre AB, à ſon Parametre BG, & au Rectangle AEB, un Quarré proportionnel, dont le côté EF, étant placé de part & d'autre parallelement au Parametre BG, on aura en F, deux autres points de l'Hyperbole; & ainſi enſuite. *36. Fig.*

Mais, pour avoir une pratique aiſée, & pour dé-

36 Fig. crire en même-temps deux Hyperboles, que nous appellerons *Oppoſées*, leſquelles ſeront égales, ſuppoſons que l'Angle A B G, ſoit droit, en ſorte que le Diametre A B, ſoit un Axe determiné. Trouvez le point O, milieu de cét Axe A B, & entre le même Axe A B, & ſon Parametre B G, une moyenne proportionnelle O K, que nous appellerons *Second Axe*. Tirez à l'Axe A B, prolongé de côté & d'autre, autant de perpendiculaires que vous voudrez trouver de points de l'Hyperbole, comme C D, E F, &c. en diſtances égales des deux extrémitez A, B, de l'Axe determiné A B. Décrivez du point O, que nous appellerons *Centre* de l'Hyperbole, ou des Hyperboles oppoſées, par les points C, E, &c. les demi-Cercles C H C, E I E, &c. qui donneront ſur le Parametre B G, prolongé quand il en ſera beſoin, les points H, I, &c. Aprés cela cherchez aux trois lignes A B, O K, B H, une quatriéme proportionnelle C D, & pareillement aux trois lignes A B, O K, B I, une quatriéme proportionnelle E F, & ainſi enſuite, & les points D, F, ſeront de l'Hyperbole.

Demonſtration. Car, puiſque par la conſtruction nous avons cette Analogie, A B, O K :: B H, C D, & par conſequent celle-cy, A B*q*, O K*q* :: B H*q*, C D*q*; ſi à la place du Quarré O K, on met le Rectangle A B G, qui luy eſt égal, parce que l'on a fait O K, moyenne proportionnelle entre A B, B G; & à la place du Quarré B H, le Rectangle ſous la petite ligne A C, & la grande A C, c'eſt-à-dire, le Rectangle A C B, qui luy eſt égal, par la nature du Cercle, on aura cette autre Analogie, A B*q*, A B G :: A C B, C D*q*; & ſi au lieu des deux premiers termes

AB *q*, ABG, on met les deux AB, BG, qui ſont en même raiſon, par 1. 6. on aura cette derniere Analogie, AB, BG:: ACB, CD *q*, qui fait connoître que le point D, eſt de l'Hyperbole. *36. Fig.*

On demontrera de la même façon que le point E, eſt de l'Hyperbole : mais on peut trouver un peu autrement les mêmes points D, E, ſçavoir en cherchant aux trois lignes OK, BG, BH, une quatriéme proportionnelle CD, & pareillement aux trois lignes OK, BG, BI, une quatriéme proportionnelle EF, & les deux points D, E, ſeront de l'Hyperbole.

Car, puiſque par la conſtruction nous avons cette Analogie, OK, BG:: BH, CD; ſi à la place des deux premiers termes OK, BG, on met les deux AB, OK, qui ſont en même raiſon, à cauſe des trois proportionnelles AB, OK, BG, on aura celle-cy, AB, OK:: BH, CD, de laquelle on a conclu auparavant, que le point D, étoit de l'Hyperbole, &c. *Demonſtration.*

Corollaire I.

Il ſuit évidemment de cette conſtruction, que les Hyperboles oppoſées ADF, BDF, doivent paſſer par les extrémitez A, B, de leur Axe commun AB, & qu'elles ſont égales, & que par conſequent le Parametre BG, de l'Hyperbole BDF, eſt égal à celuy de l'Hyperbole oppoſée ADF, à l'égard du même Axe determiné AB.

Corollaire II.

Il s'enſuit auſſi, que les Quarrez des Ordonnées CD, EF, ſont proportionnels aux Rectangles correſpondans ACB, AEF, puiſque le Quarré de cha-

Fig. 36. que Ordonnée eſt à ſon Rectangle correſpondant, comme le Diametre A B, à ſon Parametre B G, par la generation. Et comme ces Rectangles vont toûjours croiſſant à meſure que les Ordonnées C D, E F, s'éloignent plus des Sommets A, B, ces mêmes Ordonnées C D, E F, iront toûjours croiſſant. D'où il eſt aiſé de conclure, que chaque Hyperbole va toûjours s'elargiſſant, & s'éloignant de plus en plus de l'Axe indeterminé A E, ou B E, & auſſi du Parametre B G, & par conſequent de toutes les paralleles au même Parametre B G, telle qu'eſt la ligne L M, qui paſſe par le centre O, & que nous appellerons *Axe conjugué*, lequel diviſe en deux egalement toutes les lignes paralleles à l'Axe A B, & terminées par les deux Hyperboles oppoſées A D F, B D F, comme D D, F F, &c. à cauſe des deux lignes égales O A, O B, des deux égales A C, B C, & des deux égales A E, B E, en les prenant chacune dans ſon Hyperbole. Cela eſt trop évident par la conſtruction, ſans qu'il ſoit beſoin d'une plus longue demonſtration. D'où l'on conclut auſſi aiſément, que le Parametre B G, ne rencontre l'Hyperbole B D F, qu'au Sommet B, ſans la couper, & que l'Axe indeterminé B E, diviſe toutes ſes Ordonnées à Angles droits & en deux également.

COROLLAIRE III.

ENFIN il s'enſuit, que le Quarré d'une Ordonnée à l'Axe B E, comme de C D, ſera égal au Rectangle correſpondant A C B, lorſque l'Axe A B, ſera égal à ſon Parametre B G, auquel cas l'Hyperbole B D F, & ſon oppoſée A D F, ſe nommera *Equilatere*; & que ce même Quarré C D, ſera moindre

que le Rectangle correſpondant A C B, quand l'Axe A B, ſera plus grand que ſon Parametre B G; & enfin que le meſme Quarré C D, ſera plus grand que le Rectangle correſpondant A C B, lorſque l'Axe A B, ſera moindre que ſon Parametre B G. 36. Fig.

L'Analyſe nous enſeignera une conſtruction de l'Hyperbole, qui ſera beaucoup plus facile que la precedente. Pour découvrir cette conſtruction, ſuppoſons que par les extrémitez A, B, de l'Axe determiné A B, on ait décrit les deux Hyperboles oppoſées & égales A D, B D, dont l'Axe commun ſoit A B, le centre commun ſoit O, & le Parametre commun ſoit B G, & de plus, que la ligne C D, ſoit perpendiculaire au même Axe A B. Suppoſons encore que ſur le même Axe A B, prolongé vers A, & vers B, on ait determiné les deux lignes égales O E, O F, en ſorte que ſi par quelque point de l'une des Hyperboles A D, B D, comme D, de l'Hyperbole B D, on tire des deux points determinez E, F, les droites D E, D F, leur difference D E - D F, ſoit toûjours égale à une même ligne donnée: car ainſi en décrivant de l'un de ces deux points, comme du point E, le plus éloigné de B, avec une ouverture du compas un peu plus grande que A E, ou que B F, un arc de Cercle, & un autre de l'autre point F, le plus proche de B, avec une ouverture du compas égale à la ſomme de la ligne donnée, & de l'ouverture du premier arc, la Section de ces deux arcs donnera un point de l'Hyperbole A D; & l'on en pourra trouver de la même façon autant d'autres points que l'on voudra, & décrire auſſi de la même façon l'Hyperbole oppoſée 37. Fig.

37. Fig. BD, lorſqu'on aura une fois determiné la longueur de la ligne donnée, & des deux lignes OE, OF, en ſorte que cette longueur ſoit invariable, & indépendante de la ligne indeterminée AC, ou BC; autrement cette même longueur ne pourroit pas ſervir pour trouver autant de points de l'Hyperbole qu'on voudroit.

Pour donc determiner la longueur de cette ligne, qui doit être donnée, & celle des lignes OE, OF, indépendamment de la ligne indeterminée AC, ou BC, & ſeulement par rapport à l'Axe AB, à ſon Parametre BG, & au ſecond Axe OK, qui ſont invariables, au lieu que AC, ou BC, peut changer en une infinité de manieres differentes; faiſons les ſuppoſitions ſuivantes:

AB ∽ d.
BG ∽ p.
OK ∽ f.
Hyp. AD. AC ∽ x ∽ BC. *Hyp* BD.
CD ∽ y.
BF ∽ z ∽ AE.

pour avoir dans l'Hyperbole BD,

AC ∽ $x+d$.
CF ∽ $x-z$.
OF ∽ $\frac{1}{2}d+z$ ∽ OE.
CE ∽ $x+d+z$.
DE ∽ $\sqrt{xx+2dx+dd+2zx+2dz+zz+yy}$.
DF ∽ $\sqrt{xx-2zx+zz+yy}$.

Pour connoître à quel Quarré il faut égaler le Quarré $xx-2zx+zz+yy$, de la ligne DF, en telle ſorte que les lignes égales OE, OF, ou bien les lignes AE, BF, ſoient invariables, & indépendantes de la

partie

partie indeterminée B C ∽ x, il ne faut pas que dans 37. Fig.
leur valeur, c'eſt-à-dire, dans la valeur qu'on trouvera de z, il demeure la lettre indeterminée x. Pour cette fin, il faut que dans ce Quarré les termes xx, yy, ſe rencontrent, afin que par l'antitheſe ils ſe detruiſent, car ainſi le reſte de l'Equation ſe pourra diviſer plus facilement par x; ce qui ſe doit faire, afin que cét x, s'évanouïſſe, & qu'ainſi on puiſſe trouver z, indépendamment de la lettre indeterminée x.

On ne peut pas prendre le Quarré $xx + 2dx + dd + 2xz + 2dz + zz + yy$, de la ligne DE, où les Quarrez xx, yy, ſe rencontrent, parce que cette ligne DE, eſt plus grande que la ligne DF. C'eſt pourquoy on diminuëra cette ligne trop grande DE, de quelque quantité, comme de ω; & cette ligne ainſi diminuée, ſçavoir $\sqrt{xx + 2dx + dd + 2xz + 2dz + zz + yy} - \omega$, pourra être égalée à la ligne DF ∽ $\sqrt{xx - 2xz + zz + yy}$, en faiſant cette Equation, $\sqrt{xx + 2dx + dd + 2xz + 2dz + zz + yy} - \omega$ ∽ $\sqrt{xx - 2xz + zz + yy}$, où prenant le Quarré de chaque partie, on aura celle-cy, $-2\omega\sqrt{xx + 2dx + dd + 2xz + 2dz + zz + yy} + xx + 2dx + dd + 2xz + 2dz + zz + yy + \omega\omega$ ∽ $xx - 2xz + zz + yy$; & par l'antitheſe on aura celle-cy, $dd + 2dx + 4xz + 2dz + \omega\omega$ ∽ $2\omega\sqrt{xx + 2dx + dd + 2xz + 2dz + zz + yy}$; & pour diminuer le nombre des termes, mettez d, à la place de ω, en ſuppoſant d ∽ ω, pour avoir cette autre Equation, $2dd + 2dx + 4xz + 2dz$ ∽ $2d\sqrt{xx + 2dx + dd + 2xz + 2dz + zz + yy}$, dont chaque partie étant diviſée par 2, on aura celle-cy, $dd + dx + 2xz + dz$ ∽ $d\sqrt{xx + 2dx + dd + 2xz + 2dz + zz + yy}$, où prenant le Quarré de chaque partie, on aura cette autre Equation, $d^4 + 2d^3x + ddxx + 6ddxz + 4dxxz + 4xxzz + 2d^3z + 4dxzz + ddzz$ ∽

37. Fig. $ddxx + 2d^3x + d^4 + 2ddxz + 2d^3z + ddzz + ddyy$; & par l'antitheſe on aura celle-cy, $4xxzz + 4dzzx + 4dzxx + 4ddzx - ddyy \backsim 0$; & ſi à la place de yy, on met $px + \frac{xx}{4}$, qui luy eſt égal, comme l'on connoît par l'Equation conſtitutive de l'Hyperbole, on aura cette autre Equation, $4xxzz + 4dxzz + 4dxxz + 4ddxz - ddpx - dpxx \backsim 0$, laquelle étant diviſée par $4xx + 4dx$, on aura cette derniere Equation, $zz + dz - \frac{1}{4}dp \backsim 0$, dans laquelle on trouvera $z \backsim \frac{1}{2}\sqrt{dd + dp} - \frac{1}{2}d$. Et parce que le ſecond Axe OK $\backsim ſ$, eſt moyen proportionnel entre l'Axe determiné AB, & ſon Parametre BG, ſon Quarré $ſſ$, ſera égal au Rectangle dp. Si donc on met $ſſ$, à la place de dp, on aura $z \backsim \frac{1}{2}\sqrt{dd + ſſ} - \frac{1}{2}d$, pour AE, & BF; c'eſt pourquoy on aura OE, ou OF $\backsim \frac{1}{2}\sqrt{dd + ſſ}$.

Ce qui fait connoître que chacune des deux lignes égales OE, OF, eſt égale à la Racine quarrée de la ſomme des Quarrez des moitiez de l'Axe determiné AB, & du ſecond Axe OK. Ainſi, les deux lignes invariables OE, OF, ſeront connuës, aprés quoy la quantité que nous avons ſuppoſé donnée, ſera auſſi connuë, parce qu'elle eſt égale à l'Axe determiné AB, puiſque nous avons égalé la ligne DF; à la difference des lignes DE, & ω, ou d, ou AB; ce qui fait que cette ligne AB, eſt égale à la difference des deux DE, DF.

Autre Conſtruction. Mais, pour venir à la pratique, prenez ſur le Parametre BG, que je ſuppoſe perpendiculaire à l'Axe determiné AB, la ligne BI, égale à la moitié du ſecond Axe OK, & faites les lignes OE, OF, égales chacune à la ligne OI, pour avoir ſur l'Axe prolongé AB, les points invariables E, F: de ſorte que la lon-

gueur des lignes égales O E, O F, ſera determinée. *37. Fig.* Car à cauſe de A B $\backsim d$, on aura $\frac{1}{2}d$, pour chacune des deux lignes égales O A, O B; & à cauſe de O K $\backsim f$, on aura ſa moitié B I $\backsim \frac{1}{2}f$, dont le Quarré $\frac{1}{4}ff$, étant ajoûté au Quarré $\frac{1}{4}dd$, de O B $\backsim \frac{1}{2}d$, on aura $\frac{1}{4}dd + \frac{1}{4}ff$, pour le Quarré de la ligne O I, ou O E, ou O F, laquelle par conſequent vaudra $\sqrt{\frac{1}{4}dd + \frac{1}{4}ff}$, ou $\frac{1}{2}\sqrt{dd+ff}$, telle que nous l'avons trouvée.

Par le moyen de ces deux points invariables E, F, que nous appellerons *Foyers* des deux Hyperboles oppoſées A D, B D, on pourra trouver autant de points que l'on voudra de chaque Hyperbole, comme vous allez voir à l'imitation du point D, qui ſe peut trouver par une même operation en quatre lieux également éloignez de l'Axe conjugué L M, & par conſequent des deux extrémitez A, B, de l'Axe determiné A B, en cette ſorte.

Ayant décrit de l'un des deux Foyers E, F, comme de F, avec une ouverture du compas un peu plus grande que A E, ou que B F, un arc de Cercle, portez cette même ouverture ſur l'Axe A B, prolongé, depuis ſon extrémité B, en H; & avec l'ouverture de toute la ligne A H, décrivez de l'autre Foyer E, un autre arc de Cercle; & la rencontre de cét arc avec le premier, donnera le point D, qui ſera de l'Hyperbole.

Pour la demonſtration, décrivez du point D, par le Foyer F, le demi-Cercle P F Q, qui coupe icy l'Axe A B, prolongé en H, & la ligne D E, auſſi prolongée aux points P, Q: ce qui fait que comme par cette conſtruction, la difference des lignes D E, D F, eſt égale à l'Axe determiné A B; auſſi la ligne E P, eſt *Demonſtration. 38. Fig.*

31. Fig. egale au même Axe AB, à cauſe des deux lignes égales DF, DP. C'eſt pourquoy, ſi l'on diviſe EP, en deux également au point R, les quatre lignes ER, PR, AO, BO, ſeront égales. On voit auſſi par 3. 3. que ſi l'on tire du point D, à l'Axe indeterminé BH, la perpendiculaire CD, les deux lignes CF, CH, ſeront égales.

1. Cela étant ſuppoſé, on connoîtra premierement par 6. 2. que OF*q*, ou OI*q*, ou BO*q* † BI*q*, eſt égal à AFB † BO*q*; c'eſt pourquoy en oſtant BO*q*, il reſtera le ſeul Quarré BI, égal au ſeul Rectangle AFB.

2. Puiſque par 36. 3. le Rectangle QEP, eſt égal au Rectangle HEF, on aura cette Analogie, EP, EF:: EH, EQ; & en prenant les moitiez de tous les termes, on aura cette ſeconde Analogie, BO, EO:: OC, DR; & en compoſant, on aura celle-cy, BO, BO † EO:: OC, OC † DR; & en permutant, on aura celle-cy, BO, OC:: BO † EO, OC † DR; & en compoſant, on aura celle-cy, BO, BO † OC:: BO † EO, BO † EO † OC † DR; & à cauſe de BO † OC, ou de AO † OC ∽ AC, de BO † EO ∽ BE ∽ AF, & de BO † EO † OC † DR, ou de ER † CE † DR ∽ DE † CE, on aura cette derniere Analogie, BO, AC:: AF, DE † CE.

3. Si dans la ſeconde Analogie, BO, EO:: OC, DR, on diviſe, on aura celle-cy, BO, EO - BO:: OC, DR - OC; & en permutant, on aura celle-cy, BO, OC:: EO - BO, DR - OC; & en diviſant, on aura celle-cy, BO, OC - BO:: EO - BO, DR - OC - EO † BO; & à cauſe de OC - BO ∽ BC, de EO - BO,

ou de EO-AO ∽ AE ∽ BF, & de DR-OC-EO† 31. Fig.
BO, ou de DR-CE †ER ∽ DE-CE, on aura cette derniere Analogie, BO, BC::BF, DE-CE.

Si l'on compare cette derniere Analogie avec la derniere de l'article second, en faisant des Rectangles sous les termes homologues correspondans dans chacune, comme vous voyez icy, on aura cette troisiéme 4.

BO, AC:: AF, DE†CE.
BO, BC:: BF, DE-CE.

BOq, ABC :: AFB, DEq-CEq.

Analogie, BOq, ABC::AFB, DEq-CEq; & si au lieu du Rectangle AFB, on met le Quarré BI, qui luy est égal, par le premier article, & à la place de la difference DEq-CEq, le Quarré CD, qui luy est égal, par 47. 1. on aura cette autre Analogie, BOq, ACB::BIq, CDq; & si à la place des deux antecedens BOq, BIq, on met leurs quadruples ABq, OKq, & qu'on permute, on aura cette autre Analogie, ABq, OKq::ACB, CDq; & enfin, si au lieu des deux premiers termes ABq, OKq, on met les deux AB, BG, qui sont en même raison, à cause des trois proportionnelles AB, OK, BG, par la construction, on aura cette derniere Analogie, AB, BG:: ACB, CDq, qui fait connoître que le point D, est de l'Hyperbole. Ce qu'il faloit demontrer.

Lorsque le point C, conviendra avec le Foyer F, c'est-à-dire, lorsque la perpendiculaire CD, tombera sur le Foyer F, le demi-Cercle PFQ, ne coupera pas l'Axe BH, & il ne fera que le toucher au même Foyer F; neantmoins la demonstration sera toûjours la même, si l'on met OF, à la place de OC, & le Quarré

de la Touchante EF, à la place du Rectangle HEF.

39. Fig. On peut trouver par l'Analyſe une conſtruction encore plus facile que la precedente. Pour cette fin, prolongez de l'autre côté la ligne BI, en L, & tirez indefiniment du centre O, par les points I, L, les deux *Aſymptotes* OI, OL, ainſi appellées, parce qu'elles ne ſçauroient jamais couper l'Hyperbole BC, ſi loin qu'on les prolonge, comme vous verrez dans la ſuite.

Pour trouver une troiſiéme conſtruction de l'Hyperbole, par le moyen de ces deux Aſymptotes OI, OL, tirons par l'extrémité B, de l'Axe AB, une ligne quelconque NQ, qui coupe ici les deux Aſymptotes OI, OL, aux points N, Q, & l'Hyperbole BD, au point C. Tirez des trois points C, N, Q, à l'Axe AB, les perpendiculaires CD, NP, QR, & du point C, à l'Axe indeterminé BR, la parallele CS. Aprés quoy on ſuppoſera

$$AB \sim d.$$
$$BG \sim p.$$
$$OK \sim f.$$
$$BD \sim x \sim RS.$$
$$CD \sim y.$$
$$OR \sim z.$$
$$OP \sim \omega.$$
$$BC \sim u.$$

pour avoir

$$OB \sim \tfrac{1}{2}d \sim OA.$$
$$BI \sim \tfrac{1}{2}f \sim BL.$$
$$BP \sim \tfrac{1}{2}d - \omega.$$
$$BR \sim z - \tfrac{1}{2}d.$$
$$DR \sim z - \tfrac{1}{2}d - x \sim CS.$$

Dans les Triangles ſemblables OBI, OPN, on trouvera PN ∽ $\frac{fu}{d}$, & dans les deux ſemblables BPN, BDC, on trouvera la même PN ∽ $\frac{dy-2yu}{2x}$. Ainſi on aura cette Equation, $\frac{fu}{d}$ ∽ $\frac{dy-2yu}{2x}$, dans laquelle on trouvera ω ∽ $\frac{dy}{2dy+2fx}$, & au lieu de BP ∽ $\frac{1}{2}d-\omega$, on aura BP ∽ $\frac{dfx}{2dy+2fx}$, par le moyen de laquelle on trouvera dans les deux Triangles ſemblables BPN, BDC, l'Hypotenuſe BN ∽ $\frac{dfu}{2dy+2fx}$. 39. Fig.

Dans les Triangles ſemblables OBL, ORQ, on trouvera RQ ∽ $\frac{fx}{d}$, & dans les deux ſemblables BDC, BRQ, on trouvera la même RQ ∽ $\frac{2fx-dy}{2x}$; c'eſt pourquoy on aura cette Equation, $\frac{fx}{d}$ ∽ $\frac{2fx-dy}{2x}$, dans laquelle on trouvera z ∽ $\frac{ddy}{2dy-2fx}$; & au lieu de CS ∽ $z-\frac{1}{2}d-x$, on aura CS ∽ $\frac{dfx+2fxx-2dxy}{2dy-2fx}$, par le moyen de laquelle on trouvera dans les deux Triangles ſemblables OBL, CSQ, l'Hypotenuſe CQ ∽ $\frac{dfu+2fxu-2dyu}{-dy-2fx}$.

Puiſque donc nous avons trouvé BN ∽ $\frac{dfu}{2dy+2fx}$, & CQ ∽ $\frac{dfu+2fxu-2dyu}{-dy-2fx}$, nous ſçavons que ces deux lignes BN, CQ, ſont dans la raiſon de ces deux fractions, $\frac{dfu}{2dy+2fx}$, $\frac{dfu+2fxu-2dyu}{-dy-2fx}$; & ſi on les diviſe chacune par $\frac{1}{2}u$, on aura ces deux autres fractions, $\frac{df}{dy+fx}$, $\frac{df+2fx-2dy}{-dy-fx}$, pour la raiſon des deux lignes BN, CQ; & ſi on reduit ces deux dernieres fractions en même denomination, on aura en entiers ces deux autres termes, $ddfy-dffx$, $ddfy+dffx+2ffxx-2ddyy$, pour la raiſon des deux mêmes lignes BN, CQ.

Parce que l'on a ff ∽ dp, puiſque le ſecond Axe OK ∽ f, eſt moyen proportionnel entre l'Axe determiné AB ∽ d, & ſon Parametre BG ∽ p, on aura p ∽ $\frac{ff}{d}$; & au lieu de l'Equation conſtitutive de l'Hyperbole, yy ∽ $px+\frac{pxx}{d}$, on aura celle-cy, yy ∽ $\frac{fx}{d}+\frac{ffxx}{dd}$. C'eſt

39. Fig. pourquoy ſi l'on met $\frac{ffx}{d} + \frac{fxx}{2d}$, à la place de yy, les deux termes precedens, $ddfy - dffx$, $ddfy + dffx + 2ffxx - 2ddyy$, ſe changeront en ces deux autres, $ddfy - dffx$, $ddfy - dffx$, leſquels étant égaux, font connoître que les deux lignes BN, CQ, ſont auſſi égales, d'où l'on tire cette troiſiéme conſtruction.

Troiſiéme conſtruction. Ayant tiré par le point B, une ligne quelconque NQ, qui coupe les deux Aſymptotes OI, OL, portez ſur cette ligne NQ, la ligne BN, de l'autre côté, depuis Q, en C, & le point C, ſera de l'Hyperbole.

Demonſtration. Pour la demonſtration, prolongez la ligne CD, juſqu'à ce qu'elle coupe les Aſymptotes OT, OV, aux deux points V, T. Tirez par le point B, à l'Aſymptote OT, la parallele BM, & par les points B, C, à l'autre Aſymptote OV, les paralleles BE, CF. Il eſt evident par la conſtruction, que les lignes TV, CZ, ſont diviſées en deux également au point D, par l'Axe BR, & que les lignes OE, BE, ſont égales, auſſi-bien que les deux OE, FQ, & que les deux MN, CF, & que par conſequent le Parallelograme BEOM, eſt un Rombe. Tout cela eſt trop aiſé à demontrer, pour en parler davantage.

1. Dans les Triangles ſemblables OQN, FQC, on a cette Analogie, FQ, OQ :: CF, ON; & en diviſant on a celle-cy, FQ, FO :: CF, ON - CF; & ſi à la place de FQ, on met ſon égale OE, & qu'à la place de ON - CF, ou ON - MN, on mette ſon égale OM, ou BE, on aura cette derniere Analogie, OE, OF :: CF, BE, où l'on voit que le Rectangle OFC, eſt égal au Rectangle OEB, qui vaut autant que le Quarré OE, à cauſe des deux lignes égales OE, BE.

Puiſque

Puiſque donc nous avons cette Analogie, OE, OF :: CF, BE, ſi à la place des deux derniers termes CF, BE, on met les deux CT, BL, qui ſont en même raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables FCT, EBL; & à la place des deux premiers OE, OF, les deux BN, CN, qui ſont en même raiſon, à cauſe des paralleles BE, CF; ou ſi à la place de ces deux BN, CN, on met les deux BI, CV, qui ſont en meſme raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables BIN, CVN; on aura cette autre Analogie, BI, CV :: CT, BL, où l'on voit que le Rectangle VCT, eſt égal au Rectangle IBL, c'eſt-à-dire, au Quarré BL, à cauſe des deux lignes égales BI, BL. 9 Eg.

C'eſt pourquoy le Quarré BL, eſtant égal au Rectangle VCT, on pourra faire cette Analogie, OBq, BLq :: OBq, VCT; & ſi au lieu des deux premiers termes OBq, BLq, on met les deux ODq, DTq, qui ſont en même raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables OBL, ODT; & à la place du dernier VCT, la difference DTq-CDq, qui luy eſt égale, par 5. 2. on aura cette autre Analogie, ODq, DTq :: OBq, DTq-CDq; & en permutant, on aura celle-cy, ODq, OBq :: DTq, DTq-CDq; & en diviſant, on aura celle-cy, ODq, ODq-OBq :: DTq, CDq; & en permutant, on aura celle-cy, ODq, OTq :: ODq-OBq, CDq. Et ſi au lieu des deux premiers termes, ODq, DTq, on met les deux OBq, BLq, qui ſont en même raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables OBL, ODT; & au lieu du troiſiéme ODq-OBq, ſon égal ADB, par 6. 2. on aura cette autre Analogie, OBq, BLq :: ADB, CDq; & ſi à la place des 3.

Fig. 39. deux premiers termes OBq, BLq, on met leurs quadruples ABq, OKq; ou si à la place de ces deux, on met les deux AB, BG, qui sont en même raison, à cause des trois proportionnelles AB, OK, BG, par la construction, on aura cette derniere Analogie, AB, BG :: ADB, CDq, qui fait connoître que le point C, est de l'Hyperbole. Ce qu'il faloit faire & demontrer.

Corollaire I.

On demontrera de la même façon, que si l'on tire au dedans des Asymptotes OT, OV, par le même point B, plusieurs autres lignes, pour y trouver d'autres points de l'Hyperbole, tous les Rectangles OFC, seront égaux au même Quarré OE, & que par consequent ils seront égaux entre eux. D'où il est aisé de conclure, qu'à mesure que les longueurs OF, de ces Rectangles égaux croîtront, leurs largeurs CF, décroîtront; & qu'ainsi l'Asymptote OT, s'approche de plus en plus de l'Hyperbole BC, sans jamais la rencontrer.

Cela se peut aussi conclure, de ce que le Rectangle VCT, est égal au quarré BL, parce que l'Hyperbole ZBC, s'élargissant toûjours, comme vous avez vû dans la premiere construction, le Rectangle VCT, aura sa longueur VC, toûjours plus grande, à mesure qu'elle s'éloignera davantage du point B, & par consequent sa largeur CT, plus petite, puisque tous les Rectangles infinis VCT, étant égaux au même Quarré BL, sont égaux entre eux. Ce qui fait voir que l'Asymptote OQ, s'approche toûjours de plus en plus de l'Hyperbole BC, sans jamais la rencontrer.

COROLLAIRE II. 39. Fig.

IL s'enſuit auſſi, que ſi des deux extrémitez N, Q, de la ligne NQ, on tire à l'Axe AB, les perpendiculaires PN, QR, la ligne OR, ſe trouvera coupée aux deux points P, B, dans une raiſon que le *R. P. Gregoire de S. Vincent* appelle *Moyenne & extrême raiſon proportionnelle*, & que *Monſieur De la Hire* nomme *Proportion Harmonique*; c'eſt-à-dire, que le Rectangle ſous toute la ligne OR, & la partie du milieu BP, eſt égal au Rectangle ſous les deux autres parties OP, BR; ce que nous demontrerons en cette ſorte.

Dans les Triangles ſemblables OBL, ORQ, on a cette Analogie, OB, BL :: OR, QR; & dans les deux ſemblables BDC, BRQ, on a celle-cy, BD, CD :: BR, QR; & ſi l'on fait des Rectangles ſous les termes homologues correſpondans *Demonſtration.*

OB, BL :: OR, QR.
BD, CD :: BR, QR.
OBD, BLCD :: ORB, QR*q*.

dans ces deux Analogies, on aura cette troiſiéme Analogie, OBD, BLCD :: ORB, QR*q*.

Dans les Triangles ſemblables OBL, OPN, on a cette Analogie, OB, BL :: OP, PN; & dans les deux ſemblables BDC, BPN, on a celle-cy, BD, CD :: BP, PN; & ſi l'on fait des Rectangles ſous les termes homologues correſpondans

OB, BL :: OP, PN.
BD, CD :: BP, PN.
OBD, BLCD :: OPB, PN*q*.

dans chaque Analogie, on aura cette troiſiéme Analogie, OBD, BLCD :: OPB, PN*q*; & ſi à la place

30 Fig. des deux premiers termes, OBD, BLCD, on met les deux ORB, QR*q*, qui ſont en même raiſon, par la troiſiéme Analogie precedente, on aura cette autre Analogie ORB, QR*q*:: OPB, PN*q*; & ſi à la place des deux conſequens QR*q*, PN*q*, on met les deux BR*q*, BP*q*, qui ſont en même raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables BRQ, BPN, on aura cette autre Analogie, ORB, BR*q*:: OPB, BP*q*; & enfin, ſi à la place des deux Rectangles ORB, BR*q*, dont la hauteur commune eſt BR, on met leurs baſes OR, BR, qui ſont en même raiſon, par 1. 6. & que pareillement à la place des deux Rectangles OPB, BP*q*, dont la hauteur commune eſt BP, on mette leurs baſes OP, BP, on aura cette derniere Analogie, OR, BR::OP, BP, qui fait connoître que le Rectangle ORBP, eſt égal au Rectangle BROP, Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE III.

40. Fig. SI par le point de milieu S, de la ligne NQ, on tire au centre O, la droite OS, & que par le point E, où elle coupe l'Hyperbole BC, on tire à la même ligne NQ, la parallele MR, cette parallele MR, ne rencontrera l'Hyperbole BC, qu'au point E.

Demonſtration. Car, ſi on veut qu'elle la rencontre encore en un point, comme en F, que l'on tire par les deux points E, F, à l'Aſymptote OI, les paralleles EK, FL, pour avoir les deux Triangles ſemblables RFL, REK, & les deux lignes égales KO, KR, à cauſe des deux égales SN, SQ, par la conſtruction, leſquelles rendent égales les deux EM, ER, à cauſe des Triangles ſemblables ONQ, OMR, dont chacun eſt di-

viſé en deux également par la droite OS. *Fig. 40.*

Cela étant ſuppoſé, on aura dans les Triangles ſemblables REK, RFL, cette Analogie, RK, RL :: EK, FL; & en diviſant, on aura celle-cy, RK, KL :: EK, EK-FL, ou OK, KL :: EK, EK-FL.

Puiſque par *Coroll. 1.* le Rectangle OKE, eſt égal au Rectangle OLF, on aura cette Analogie, OK, OL :: FL, EK; & en diviſant on aura celle-cy, OK, KL :: FL, EK-FL; & ſi au lieu des deux premiers termes OK, KL, on met les deux EK, EK-FL, qui ſont en même raiſon, par l'article precedent, on aura cette autre Analogie, EK, EK-FL :: FL, EK-FL, où l'on voit, que puiſque les conſequens ſont égaux, les antecedens EK, FL, ſont égaux auſſi: ce qui étant impoſſible, il eſt impoſſible auſſi que la ligne MR, rencontre l'Hyperbole BC, ailleurs qu'au point E. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE IV.

C'EST pourquoy ſi l'on donnoit le point E, ſur l'Hyperbole BC, pour en tirer une Touchante, il faudroit tirer par ce point E, à l'Aſymptote oppoſée OI, la parallele EK, & faire KR, égale à KO, pour avoir le point R, par lequel & par le point donné E, il faudroit tirer la Touchante ER.

DEFINITIONS.

AXE *indeterminé* d'une Hyperbole, c'eſt une ligne droite, qui diviſe à Angles droits, & en deux également, une infinité de certaines lignes droites paralleles entre elles, tirées au dedans de l'Hyperbole, & terminées de côté & d'autre par la même Hyperbole. 1.

Hyperboles oppoſées, ce ſont deux Hyperboles égales, 2.

40. Fig. & placées à une certaine distance d'un sens contraire, l'une à l'égard de l'autre, sur un même Axe indeterminé prolongé autant qu'il en est besoin.

3. *Axe determiné* d'une Hyperbole, c'est la partie de l'Axe indeterminé, comprise entre les deux Hyperboles opposées. Il est évident que l'Axe determiné est commun aux deux Hyperboles opposées, & qu'il en marque la distance.

4. *Centre* d'une Hyperbole, c'est le point du milieu de l'Axe d terminé Il est évident que le centre est aussi commun aux deux Hyperboles opposées.

5. *Diametre determiné* d'une Hyperbole, c'est une ligne droite tirée par le centre, & terminée par les deux Hyperboles opposées. Il est évident qu'une Hyperbole a une infinité de Diametres determinez, qui sont tous communs aux deux Hyperboles opposées, & que l'Axe determiné est le plus court de tous ces Diametres.

6. *Diametre indeterminé* d'une Hyperbole, c'est la continuation indeterminée d'un Diametre determiné au dedans de l'Hyperbole. Il est évident que l'Axe indeterminé est un Diametre indeterminé.

7. *Diametre indéfiny* d'une Hyperbole, c'est une ligne droite, laquelle etant tirée par le centre de l'Hyperbole ne la rencontre jamais, si loin qu'on la prolonge. Il est évident qu'une Hyperbole a aussi une infinité de Diametres indéfinis, & qu'ils sont tous communs aux deux Hyperboles opposées.

8. *Axe conjugué* d'une Hyperbole, c'est un Diametre indefiny perpendiculaire à l'Axe determiné. Il est aussi évident, qu'un Axe conjugué est commun aux deux Hyperboles opposées.

Sommet d'une Hyperbole à l'égard d'un Diametre indeterminé, c'eſt le point où elle ſe trouve coupée par ce Diametre. Il eſt évident qu'une Hyperbole a une infinité de Sommets, puiſqu'elle a une infinité de Diametres indeterminez. 9.

Touchante d'une Hyperbole, c'eſt une ligne droite, qui ne rencontre l'Hyperbole qu'en un point, ſans la couper, c'eſt-à-dire, ſans entrer au dedans. 10.

Ordonnée à un Diametre indeterminé d'une Hyperbole, c'eſt une ligne droite tirée au dedans de l'Hyperbole, parallelement à la Touchante qui paſſe par le Sommet de ce Diametre, & terminée de côté & d'autre par la même Hyperbole. Il eſt évident que toutes les Ordonnées à un même Diametre indeterminé, ſont paralleles entre elles, puiſqu'elles ſont paralleles à une même Touchante, & que toutes les perpendiculaires à l'Axe indeterminé, tirées au dedans de l'Hyperbole, ſont des Ordonnées à cét Axe. 11.

Ordonnée à un Axe conjugué d'une Hyperbole, c'eſt une ligne droite perpendiculaire à cét Axe conjugué, ou parallele à l'Axe determiné de l'Hyperbole, & terminée par les deux Hyperboles oppoſées. Il eſt évident que toutes les Ordonnées à l'Axe conjugué d'une Hyperbole, ſont paralleles entre elles, & qu'elles ſont diviſées en deux également par l'Axe conjugué. 12.

Diametre conjugué à un Diametre indeterminé d'une Hyperbole, c'eſt un Diametre indéfini parallele à la Touchante, qui paſſe par le Sommet du Diametre indeterminé. 13.

Ordonnée au Diametre conjugué d'un Diametre in- 14.

40. *Fig.* determiné d'une Hyperbole, c'eſt une ligne droite terminée par les deux Hyperboles oppoſées, & paralleles au Diametre indeterminé. Il eſt évident que toutes les Ordonnées d'un Diametre conjugué d'une Hyperbole, ſont paralleles entre elles.

15. *Parametre* du Diametre determiné d'une Hyperbole, c'eſt une ligne droite, laquelle touchant l'Hyperbole au Sommet du Diametre correſpondant indeterminé, eſt quatriéme proportionnelle au Rectangle ſous une partie du même Diametre indetermine, en la prenant depuis le Sommet, & la ſomme de cette même partie & du Diametre determiné, au Quarré de l'Ordonnée correſpondante terminée par cette partie & par l'Hyperbole, & au Diametre determiné. Il eſt évident que le Parametre eſt parallele aux Ordonnées de ſon Diametre.

16. *Second Axe* d'une Hyperbole, c'eſt une ligne droite moyenne proportionnelle entre l'Axe determiné & ſon Parametre. Il eſt evident que ce ſecond Axe eſt commun aux deux Hyperboles oppoſees.

17. *Aſymptotes* d'une Hyperbole, ce ſont deux Diametres indéfinis, qui paſſent par les extrémitez de deux lignes droites tirees de côté & d'autre par l'une des deux extremitez de l'Axe determiné, perpendiculairement au même Axe, & égales chacune à la moitie du ſecond Axe. Il eſt évident que deux Hyperboles oppoſées ont les mêmes Aſymptotes, & que l'Angle des deux Aſymptotes eſt diviſée en deux egalement par l'Axe.

18. *Foyer* d'une Hyperbole, c'eſt un point de l'Axe indeterminé, éloigné du centre de l'Hyperbole d'une quantité

quantité égale à la partie de l'une des Asymptotes, compriſe entre le centre & la Touchante au Sommet de l'Axe indeterminé.

Figure d'un Diametre determiné d'une Hyperbole, c'eſt le Rectangle ſous ce Diametre determiné & ſon Parametre. 19.

Second Diametre à l'égard d'un Diametre determiné d'une Hyperbole, c'eſt une ligne droite moyenne proportionnelle entre ce Diametre determiné & ſon Parametre. Il eſt évident que le Quarré de ce ſecond Diametre eſt égal à la Figure du Diametre determiné. 20.

PROPOSITION I.

Tirer une Touchante par un point donné ſur une Hyperbole donnée, dont les Aſymptotes ſont auſſi données.

POUR tirer une Touchante par un point donné ſur l'Hyperbole donnée B E C, dont les Aſymptotes ſont O I, O R, & par conſequent le centre eſt O; diviſez en deux également l'Angle I O R, des deux Aſymptotes O I, O R, par la droite O B; laquelle étant le demi-Axe determiné de l'Hyperbole, donnera ſur la même Hyperbole B E C, le Sommet B, de l'Axe indeterminé B D. 40. *Fig.*

Premierement, ſi le point donné eſt le Sommet B, il eſt évident par la generation, que la ligne B I, perpendiculaire à l'Axe indeterminé B D, touchera l'Hyperbole donnée B E C, au point donné B.

Mais, ſi le point eſt donné ailleurs, comme en E,

40. Fig. on tirera par ce point donné E, une Touchante, comme il a esté enseigné au *Coroll.* 3 de la troisieme construction de l'Hyperbole, ou bien en cette sorte.

Seconde construction. Tirez par le point donné E, au centre O, le Diametre indeterminé O E S, & au Sommet B, la droite B E, que vous prolongerez au delà de E, jusques en P, en sorte que E P, soit egale à E B, pour tirer par le point P, au Diametre E S, la parallele P C, qui donnera sur l'Hyperbole B E C, le point C. Tirez par ce point C, au Sommet B, de l'Axe indeterminé B D, la droite B C; & à cette ligne B C, par le point donné E, la parallele M R, qui touchera l'Hyperbole proposée B E C, au point donné E.

Demonstration. Pour la demonstration, prolongez la droite B C, jusqu'à ce qu'elle coupe les Asymptotes O I, O R, en deux points, comme N, Q, qui sera toûjours possible, par la troisieme construction de l'Hyperbole, où nous avons vû que les lignes B N, C Q, sont égales; ce qui fait que comme les deux S B, S C, sont egales, à cause des deux egales E B, E P, & des deux paralleles E S, P C, les deux S N, S Q, sont aussi égales; & dans ce cas il a esté demontré au *Coroll.* 3. de la troisieme construction de l'Hyperbole, que la droite M R, touche l'Hyperbole B E C, au point E. Ce qu'il faloit faire & demontrer.

Troisieme construction. Si l'on porte la distance O I, de côté & d'autre depuis le centre O, sur l'Axe prolongé A B, en E, & en F, ces points E, F, seront les Foyers des deux Hyperboles opposées, comme vous avez vû dans la seconde construction de l'Hyperbole. C'est pourquoy, si le point

41. Fig.

donné eſt D, en tirant de ce point donné D, aux deux Foyers E, F, les droites D E, D F; & en diviſant l'Angle E D F, en deux également par la droite D R, cette droite D R, touchera l'Hyperbole propoſée B D M, au point donné D. 41. Fig.

Car, ſi on veut qu'elle la rencontre encore en un point, comme en M, que l'on tire de ce point M, aux deux Foyers E, F, les droites M E, M F; & ayant pris ſur D E, la partie D P, égale à D F, que l'on tire les droites F P, M P. *Demonſtration.*

Cette preparation étant faite, on conſiderera que la droite F P, eſt diviſée à Angles droits, & en deux également au point N, par la droite D N, qui diviſe en deux également l'Angle D, du Triangle iſoſcele F D P; ce qui rend auſſi iſoſcele le Triangle F M P, & par conſequent la ligne M P, égale à la ligne M F. Et parce que par la deuxiéme conſtruction de l'Hyperbole, la difference des lignes M E, M F, eſt égale à la difference des lignes D E, D F, c'eſt-à-dire à E P, puiſque chacune eſt égale à l'Axe determiné A B, il faut que la difference des deux côtez M E, M P, du Triangle E P M, ſoit égale auſſi au troiſiéme côté P E: ce qui étant impoſſible, par 20. 1. il eſt impoſſible auſſi que la droite D R, rencontre l'Hyperbole B D M, ailleurs qu'au point D; c'eſt pourquoy elle la touchera en ce même point D, par *Def.* 10. Ce qu'il faloit faire & demontrer.

Ou bien, ayant tiré du point donné D, à l'Axe indeterminé B C, la perpendiculaire C D, cherchez aux deux lignes O C, O B, une troiſiéme proportionnelle O R, pour avoir le point R, par lequel, & par le 42. Fig. *Quatriéme conſtruction.*

42. Fig. point donné D, vous tirerez la droite DR, qui touchera l'Hyperbole B N D, au point donné D.

Demonstration. Car, si on veut qu'elle la rencontre encore en un point, comme en N ; que l'on tire par ce point N, à la ligne C D, la parallele M N ; & ayant décrit du centre O, de l'Hyperbole, à l'entour de l'Axe determiné A B, le demi-cercle A E B, tirez du point R, au même Axe A B, la perpendiculaire R E, qui sera terminée en E, par le demi-cercle A E B, & menez les droites O E, C E. Tirez encore du point M, la droite P M, qui touche le demi-cercle A E B, au point P, & la droite M S, parallele à la ligne C E.

Cette preparation étant faite, on considerera que puisque les trois lignes O C, O B, O R, ou O C, O E, O R, sont proportionnelles, par la construction, le Triangle O E C, est Rectangle en E, & que par consequent la droite C E, touche le demi-cercle A E C, au même point E, & le Rectangle A C B, sera égal au Quarré C E, & pareillement le Rectangle A M B, au Quarré M P, par 36. 3.

On considerera aussi que les deux Triangles R E C, R S M, étant semblables, la raison des lignes R C, R M, est égale à celle des lignes C E, M S ; & que par consequent cette raison ne peut pas être égale à celle des lignes C E, M P, parce que les lignes M P, M S, son inégales.

Parce que par la generation, on a cette Analogie, A C B, A M B :: C D *q*, M N *q* ; si à la place des deux Rectangles A C B, A M B, on met les Quarrez des Touchantes C E, M P, qui leur sont égaux, par 36. 3. & à la place des deux Quarrez C D, M N, les deux

RC, RM, qui ſont en même raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables RCD, RMN, on aura cette autre Analogie, CEq, PMq:: RCq, RMq; & par conſequent celle-cy, CE, PM:: RC, RM: laquelle étant impoſſible, par l'article precedent, il eſt impoſſible auſſi que la ligne DR, rencontre l'Hyperbole BND, ailleurs qu'au point D. Ce qu'il faloit demontrer. 42. Fig.

SCOLIE.

COMME nous venons de demontrer, que quand les trois lignes OR, OB, OC, ſont proportionnelles, la droite DR, touche l'Hyperbole BND, au point D, les trois lignes OR, OB, OC, ſont proportionnelles.

Car, ſi ces trois lignes OR, OB, OC, ne ſont pas proportionnelles, que ce ſoit les trois OR, OB, OH, & que l'on tire par le point H, à l'axe indeterminé BC, la perpendiculaire HF, qui donnera ſur l'Hyperbole BND, le point F, par lequel & par le point R, on tirera la droite RF: On demontrera, comme auparavant, que cette ligne RF, touche l'Hyperbole BND, au point D; & comme l'on ſuppoſe que la droite RD, touche auſſi l'Hyperbole, ces deux Touchantes RF, RD, doivent neceſſairement ſe rencontrer au dehors de l'Hyperbole vers les points d'attouchement F, D, ſi on les prolonge, c'eſt pourquoy elles comprendront un eſpace; ce qui étant impoſſible, il eſt impoſſible auſſi que les trois lignes, OR, OB, OH, ſoient proportionnelles. Il faut donc que les trois OR, OB, OC, ſoient proportionnelles. Ce qu'il faloit demontrer. *Demonſtration.*

42. Fig.

COROLLAIRE I.

IL ſuit évidemment de cette demonſtration & de la precedente, que l'on ne peut tirer par un même point d'une Hyperbole, qu'une Touchante, & que par conſequent les proprietez de la Touchante d'une Hyperbole, ſont reciproques.

COROLLAIRE II.

IL s'enſuit auſſi que la Touchante d'une Hyperbole, comme DR, ne ſçauroit paſſer par le centre O, de l'Hyperbole BND, & qu'elle coupe l'Axe determiné AB, au point R, entre le centre O, & le Sommet B; & de plus, que ce point R, s'approchera d'autant plus du centre O, que le point d'attouchement D, ſera plus éloigné du Sommet B, de l'Axe indeterminé BC.

COROLLAIRE III.

D'où il eſt aiſé de conclure, que le Diametre d'une Hyperbole ne la ſçauroit toucher, bien qu'il ne la puiſſe rencontrer qu'en un point, quand il eſt indeterminé, comme nous allons demontrer dans la Propoſition ſuivante.

PROPOSITION II.

Le Diametre indeterminé d'une Hyperbole, ne la coupe qu'en un point.

42. Fig.

CETTE Propoſition eſt évidente, parce que l'Hyperbole s'approchant de plus en plus de ſes Aſymptotes, & un Diametre indeterminé s'éloignant de plus en plus des mêmes Aſymptotes, il doit s'é-

loigner auſſi de l'Hyperbole, quand il a commencé à la couper, & conſequemment ne la couper qu'en un point. Neanmoins nous en donnerons une demonſtration plus ſcientifique. 41. Fig.

Je dis donc que le Diametre indeterminé T V, de l'Hyperbole T B D, dont l'Axe determiné eſt A B, & l'indeterminé eſt B C, ne coupe l'Hyperbole qu'au point T.

Car, ſi l'on veut que ce Diametre T V, coupe l'Hyperbole T B D, encore au point I; que l'on tire des deux points I, T, à l'Axe B C, les perpendiculaires I K, T L, & qu'on prolonge le Diametre indeterminé T V, au-delà de T, juſqu'à ce qu'il rencontre l'Axe determiné A B, en quelque point, comme en O, qui ſera le centre de l'Hyperbole, par *Def. 5. 6.* *Demonſtration.*

Puiſque par la generation, on a cette Analogie, A L B, A K B :: T L q, I K q; ſi au lieu des deux premiers termes A L B, A K B, on met les differences O L q - O B q, O K q - O B q, qui leur ſont égales, par 6. 2. & à la place des deux derniers T L q, I K q, les deux O L q, O K q, qui ſont en même raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables O L T, O K I, on aura cette autre Analogie, O L q - O B q, O K q - O B q :: O L q, O K q; & en diviſant, on aura cette derniere Analogie, O L q - O B q, O L q - O K q :: O L q, O L q - O K q: où l'on voit, que puiſque les deux conſequens ſont égaux, les deux antecedens O L q - O B q, O L q, ſont égaux auſſi; ce qui étant impoſſible, il eſt impoſſible auſſi que le Diametre indeterminé T V, coupe l'Hyperbole T B D, ailleurs qu'au point T. Ce qu'il faloit demontrer.

42. Fig. Je ne m'arrêteray pas icy à demontrer, que ſi on prolonge au-delà du centre O, le Diametre indeterminé T V, qui rencontre l'Hyperbole T B D, au point T, il rencontrera auſſi l'Hyperbole oppoſée, & que le Diametre determiné ſera diviſé en deux également par le centre O, parce que ces deux choſes ſont évidentes par la generation de l'Hyperbole.

PROPOSITION III.

Si on prolonge une Ordonnée à l'Axe d'une Hyperbole, juſqu'à ce qu'elle coupe les deux Aſymptotes, le Rectangle ſous les parties de toute la ligne, compriſes entre une partie de l'Hyperbole & les Aſymptotes, ſera égal au Quarré de la moitié du ſecond Axe.

43. Fig. JE dis, que ſi on prolonge l'Ordonnée E C, à l'Axe B D, de l'Hyperbole E B C, dont le centre eſt O, l'Axe determiné eſt A B, le Parametre eſt B G, le ſecond Axe eſt O K, ſa moitié eſt B I, perpendiculaire à l'Axe indeterminé B D, & les Aſymptotes ſont O F, O L, juſqu'à ce qu'elle coupe les mêmes Aſymptotes O F, O L, en deux points, comme F, L; le Rectangle F C L, eſt égal au Quarré B I.

Demonſtration. Car dans les Triangles ſemblables O B I, O D L, on a cette Analogie, O B q, B I q:: O D q, D L q; & ſi au lieu des deux premiers termes O B q, B I q, on met leurs quadruples A B q, O K q; ou ſi à la place de ces deux Quarrez on met les deux lignes A B, B G, qui ſont en même raiſon, à cauſe des trois proportionnelles

tionnelles AB, OK, BG, par *Def. 16.* ou bien encore si à la place de ces deux lignes AB, BG, on met les deux Rectangles ADB, CD*q*, qui sont en même raison, par la generation, on aura cette autre Analogie, ADB, CD*q* :: OD*q*, DL*q*; & si au lieu du troisiéme terme OD*q*, on met la somme ADB + OB*q*, qui luy est égale, par 6. 2. & à la place du quatriéme DL*q*, la somme FCL + CD*q*, qui luy est égale, par 5. 2. & qu'on permute, on aura cette autre Analogie, ADB, ADB + OB*q* :: CD*q*, FCL + CD*q*; & en divisant, on aura celle-cy, ADB, OB*q* :: CD*q*, FCL; & si au lieu des deux antecedens ADB, CD*q*, on met les deux OB*q*, BI*q*, qui sont en même raison, comme vous avez vû, on aura cette derniere Analogie, OB*q*, OB*q* :: BI*q*, FCL, qui fait connoître que le Rectangle FCL, est égal au Quarré BI. Ce qu'il faloit demontrer. 43. Fig.

COROLLAIRE.

Il suit évidemment de cette Proposition, que tous les Rectangles infinis FCL, que l'on peut avoir en tirant une infinité d'Ordonnées à l'Axe indeterminé BD, sont égaux entre eux, & que chacun est égal au quart de la Figure de l'Axe determiné AB. Et comme les largeurs FC, de ces Rectangles infinis deviennent toûjours plus grandes, à mesure que les Ordonnées à l'Axe BD, s'éloignent du Sommet B; il est de necessité que la largeur CL, se diminuë à proportion. Ainsi vous voyez ce que nous avons déja remarqué ailleurs, sçavoir que l'Hyperbole s'approche toûjours de ses Asymptotes, sans jamais les rencontrer. D'où il est aisé de conclure, que la largeur CL,

41. Fig. peut devenir plus petite que quelque ligne donnée que ce ſoit, parce que le Rectangle F C L, étant égal au Quarré B I, on peut reduire ce Quarré B I, en un Rectangle, dont la largeur ſoit moindre que la ligne donnée, ſçavoir en cherchant à cette ligne plus petite, & à la ligne B I, une troiſiéme proportionnelle, qui donnera la longueur F C, qu'il ſera facile d'appliquer entre la partie de l'Hyperbole B C, & l'Aſymptote oppoſée O F, en ſorte qu'elle ſoit perpendiculaire à l'Axe B D.

PROPOSITION IV.

Si par un point d'une Hyperbole on tire parallelement à l'Axe determiné, une ligne droite, qui coupe les deux Aſymptotes, le Rectangle ſous toute la ligne, & ſa plus petite partie entre l'Hyperbole & l'Aſymptote, ſera égal au Quarré de la moitié de l'Axe determiné.

43. Fig. JE dis, que ſi par le point C, de l'Hyperbole EBC, dont le centre eſt O, l'Axe determiné eſt A B, l'indeterminé eſt B D, le conjugué eſt M N, le ſecond eſt O K, ſa moitié eſt B I, le Parametre eſt B G, & les Aſymptotes ſont O F, O L; on tire à l'Axe determiné A B, la parallele C P, qui coupe les deux Aſymptotes O F, O L, aux points P, Q; le Rectangle P C Q, eſt égal au Quarré O B.

Demonſtration. Car, ſi l'on tire par le point C, à l'Axe B D, la perpendiculaire F L, on aura dans les Triangles ſemblables O D L, O N Q, cette Analogie, DLq, ONq::

ODq, QNq ; & si à la place de DLq, on met la somme FCL†CDq, qui luy est égale, par 5. 2. à la place de ODq, ou de CNq, la somme PCQ†QNq, qui luy est égale, par 6. 2. & à la place du Quarré ON, le Quarré CD, qui luy est égal, à cause du parallelograme ODCN ; on aura cette autre Analogie, FCL †CDq, CDq :: PCQ†QNq, QNq ; & en divisant, on aura celle-cy, FCL, CDq :: PCQ, QNq ; & si à la place des deux consequens CDq, QNq, ou ONq, QNq, on met les deux BIq, OBq, qui sont en même raison, à cause des Triangles semblables OBI, ONQ, on aura cette derniere Analogie, FCL, BIq :: PCQ, OBq : où l'on voit, que puisque les deux premiers termes FCL, BIq, sont égaux, par la Proposition precedente, les deux derniers PCQ, OBq, sont égaux aussi. Ce qu'il faloit demontrer. 43. Fig.

COROLLAIRE.

IL suit de cette Proposition, que l'Axe determiné AB, est à son Parametre BG, comme le Rectangle PCQ, au Rectangle FCL. Car, puisqu'il a esté demontré dans cette Proposition, que le Rectangle PCQ, est égal au Quarré OB, & dans la precedente, que le Rectangle FCL, est égal au Quarré BI, on pourra faire cette Analogie, OBq, BIq :: PCQ, FCL ; & si au lieu des deux premiers termes OBq, BIq, on met leurs quadruples ABq, OKq ; ou si à la place de ces deux Quarrez, on met les deux lignes AB, BG, qui sont en même raison, à cause des trois proportionnelles AB, OK, BG, par *Def. 16.* on aura cette autre Analogie, AB, BG :: PCQ, FCL. Ce qu'il faloit demontrer. *Demonstration.*

PROPOSITION V.

Si par un point d'une Hyperbole, on tire deux lignes quelconques terminées par les deux Asymptotes; & par un autre point de la même Hyperbole deux autres lignes terminées auſſi par les deux Asymptotes, & paralleles aux deux precedentes; le Rectangle ſous les deux premieres ſera égal au Rectangle ſous les deux dernieres.

44. Fig. JE dis, que ſi par le point C, de l'Hyperbole BCF, on tire deux lignes quelconques CD, CE, terminées par les deux Aſymptotes OM, ON, & par le point F, de la même Hyperbole BCF, deux autres lignes FG, FH, paralleles aux deux premieres CD, CE, & terminées auſſi par les deux Aſymptotes OM, ON, le Rectangle DCE, ſera égal au Rectangle GFH.

Demonſtration. Car, ſi l'on tire par les deux points C, F, à l'Axe indeterminé BR, les perpendiculaires KL, MN, on aura dans les Triangles ſemblables CLE, FNH, cette Analogie, CE, CL :: FH, FN; & dans les deux ſemblables DCK, GFM, on aura celle-cy, CD, CK :: FG, FM; & ſi on fait des Rectangles ſous

CE, CL :: FH, FN,
CD, CK :: FG, FM,

DCE, KCL :: GFH, MFN,

les termes homologues correſpondans dans chaque Analogie, on aura cette troiſiéme Analogie, DCE,

KCL::GFH, MFN: où l'on voit que puiſque les conſequens KCL, MFN, ſont égaux, par *Prop. III.* les antecedens DCE, GFH, ſont auſſi égaux. Ce qu'il faloit demontrer. 44. Fig.

COROLLAIRE.

COMME la demonſtration ſera toûjours la même, quelque Angle que faſſent les deux lignes CD, CE, ou FG, FH, il eſt évident que les Rectangles DCE, GFH, ſeront auſſi égaux, lorſque les deux lignes CD, CE, feront une ligne droite, auſſi-bien que les deux FG, FH.

PROPOSITION VI.

Si l'on tire comme l'on voudra, au dedans d'une Hyperbole, une ligne droite terminée par les deux Aſymptotes, la partie de cette ligne droite, compriſe entre une Aſymptote & la partie de l'Hyperbole la plus proche, eſt égale à l'autre partie de la même ligne droite, compriſe entre l'autre Aſymptote, & l'autre partie de l'Hyperbole la plus proche.

CETTE Propoſition eſt évidente par la troiſiéme conſtruction de l'Hyperbole, lorſque la ligne droite eſt perpendiculaire à l'Axe indeterminé, ou quand elle paſſe par le Sommet de cét Axe. Dans un autre cas la demonſtration ſe fera en cette ſorte.

Je dis donc, que ſi au dedans de l'Hyperbole CBF, on tire une ligne droite quelconque EH, qui coupe les deux Aſymptotes OM, ON, aux points E, H, & 45. Fig.

45. Fig. l'Hyperbole CBF, aux points C, F; la partie CE, eſt égale à la partie FH.

Demonſtration. Car, ſi l'on tire par les deux points C, F, à l'Axe indeterminé BR, les perpendiculaires KL, MN, on aura dans les Triangles ſemblables ECK, EFM, cette Analogie, CE, CK::FE, FM; & dans les deux ſemblables HFN, HCL, celle-cy, CH, CL::FH, FN; & ſi on fait des Rectangles ſous les termes

CE, CK::FE, FM,
CH, CL::FH, FN,

ECH KCL::EFN. MFN,

homologues correſpondans dans ces deux Analogies, on aura cette troiſiéme Analogie, ECH, KCL::EFH, MFN: où l'on voit, que puiſque les conſequens KCL, MFN, ſont égaux par *Prop. III.* les antecedens ECH, EFH, ſont égaux auſſi. C'eſt pourquoy on aura cette Analogie, EC, EF:: FH, CH; & en diviſant, on aura celle-cy, EC, CF::FH, CF, dont les antecedens EC, FH, ſont égaux, à cauſe des deux conſequens égaux. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE I.

IL ſuit de cette Propoſition, que ſi on tire à la ligne EH, une parallele, qui rencontre l'Hyperbole CBF, & les Aſymptotes OM, ON, la partie de cette parallele compriſe entre une Aſymptote & la partie de l'Hyperbole la plus proche, ſera égale à l'autre partie de la même parallele, compriſe entre l'autre Aſymptote & l'autre partie de l'Hyperbole la plus proche. D'où il eſt aiſé de conclure, que quand cette parallele comme QS, touchera l'Hyperbole, elle ſera diviſée en deux également au point d'attouchement P, étant terminée par les Aſymptotes OM, ON.

COROLLAIRE II. 45. Fig.

ON tire de ce Theoreme une deſcription aiſée de l'Hyperbole par un point donné entre deux Aſymptotes données. Comme ſi on donne le point C, entre les Aſymptotes données OM, ON, en tirant comme l'on voudra, par le point donné C, la droite EH, & en faiſant HF, égale à CE, le point F, ſera de l'Hyperbole.

COROLLAIRE III.

ENFIN, il s'enſuit que le Rectangle EFH, ou HCE, eſt égal au Quarré de la Touchante PQ, qui eſt parallele à l'Ordonnée CF: car, comme nous avons remarqué au *Coroll. 1.* que la Touchante QS, eſt diviſée en deux également par le point touchant P, il faut par la Propoſition precedente, que le Rectangle EFH, ſoit égal au Rectangle QPS, c'eſt à dire, au Quarré PQ.

PROPOSITION VII.

Si par un point pris à diſcretion dans chacune de deux Hyperboles oppoſées, on tire à volonté deux lignes paralleles entre elles & terminées par l'une des deux Aſymptotes, & deux autres lignes quelconques paralleles auſſi entre elles, & terminées par l'autre Aſymptote; le Rectangle ſous les deux lignes d'une Hyperbole ſera égal au Rectangle ſous les deux lignes de l'autre Hyperbole oppoſée.

JE dis, que ſi par les points C, F, pris dans chacune des deux Hyperboles oppoſées BC, AF, on tire 46. Fig.

46. Fig. les deux paralleles CD, FH, terminées par l'Aſymptote HK, & les deux paralleles CE, FG, terminées par l'autre Aſymptote LM, le Rectangle DCE, ſera égal au Rectangle GFH.

Demonſtration. Car, ſi l'on tire des deux points C, F, à l'Axe AB, les perpendiculaires KL, MN, on aura dans les Triangles ſemblables DCK, FHN, cette Analogie, CD, CK :: FH, FN; & dans les deux ſemblables CLE, FGM, celle-cy, CE, CL :: FG, FM; & ſi on fait des Rectangles ſous les termes homologues correſpondans dans chaque Analogie,

CD, CK :: FH, FN,
CE, CL :: FG, FM,
DCE, KCL :: GFH, MFN,

on aura cette troiſiéme Analogie, DCE, KCL :: GFH, MFN: où l'on voit, que puiſque les conſequens KCL, MFN, ſont égaux, chacun étant égal au Quarré BI, de la moitié du ſecond Axe, par *Prop. III.* les antecedens DCE, GFH, ſont égaux auſſi. Ce qu'il faloit demontrer.

Autre demonſtration. Ou bien, ſi l'on tire par les deux points C, F, à l'Axe AB, les paralleles CP, FS, ou aura dans les Triangles ſemblables DCP, FTH, cette Analogie, CD, CP :: FH, FT; & dans les deux ſemblables GFS, CEQ, celle-cy, CE, CQ :: FG, FS; & ſi on fait des Rectangles ſous les termes homologues

CD, CP :: FH, FT,
CE, CQ :: FG, FS,
DCE, PCQ :: GFH, SFT.

correſpondans dans chaque Analogie, on aura cette troiſiéme Analogie, DCE, PCQ :: GFH, SFT: où l'on

l'on voit que puiſque les conſequens PCQ, SFT, ſont égaux, chacun étant égal au Quarré OB, de la moitié de l'Axe determiné AB, par *Prop. IV.* les antecedens DCE, GFH, ſont égaux auſſi. Ce qu'il faloit demontrer. 46. Fig.

SCOLIE.

IL peut arriver que le point G, conviendra avec le point E, en ſorte que les deux lignes CE, FG, ne feront qu'une ſeule ligne, ſçavoir la ligne CF; & alors on demontrera de la même façon, que le Rectangle DCE, eſt égal au Rectangle EFH, pourvû que les lignes CD, FH, demeurent toûjours paralleles entre elles, & qu'elles coupent l'Aſymptote OD. 47. Fig.

COROLLAIRE I.

DANS ce cas il peut arriver que le point D, conviendra avec le point T, auquel cas le point H, conviendra auſſi avec le même point T; alors le Rectangle DCE, ſe changera au Rectangle TCE, & le Rectangle EFH, au Rectangle EFT: & il ſera permis de conclure, que le Rectangle TCE, ſera égal au Rectangle EFT, & que par conſequent la partie CE, eſt égale à la partie TF. Car à cauſe des deux Rectangles égaux TCE, EFT, on aura cette Analogie, CE, EF :: FT, CT; & en compoſant, on aura celle-cy, CE, CF :: TF, CF; & par conſequent CE ∞ TF. Ainſi vous voyez, que ſi on tire une ligne droite quelconque CF, qui coupe les deux Hyperboles oppoſées BC, AF, aux points C, F, & par conſequent les deux Aſymptotes OD, OE, aux points T, E, la partie CE, ſera égale à la partie TF.

COROLLAIRE II.

46. Fig. Il peut auſſi arriver, que les deux lignes CD, CE, ne feront qu'une même ligne droite, auquel cas les deux FH, FG, qui leur ſont paralleles, ne feront auſſi qu'une ligne droite, & le Rectangle DCE, 48. Fig. ſera toûjours égal au Rectangle GFH. Ainſi, vous voyez, que ſi au dedans des deux Hyperboles oppoſées BC, AF, on tire deux lignes quelconques paralleles entre elles, & terminées par les deux Aſymptotes OD, OE, comme DE, GH, le Rectangle DCE, ſera égal au Rectangle GFH.

COROLLAIRE III.

Dans ce cas, il peut arriver que les deux points 49. Fig. D, E, conviendront avec le centre O, de l'Hyperbole, auquel cas le Rectangle DCE, ſe changera au Quarré du demi-Diametre OC, lequel par conſequent ſera égal au Rectangle GFH. Ainſi vous voyez, que ſi à un demi-Diametre determiné de l'Hyperbole BCI, comme OC, on tire une parallele quelconque FG, qui coupe les deux Aſymptotes OG, OH, aux points G, H, & l'Hyperbole oppoſée AF, au point F, le Rectangle GFH, ſera égal au Quarré du demi-Diametre determiné OC.

PROPOSITION VIII.

Tirer par un point donné ſur une Hyperbole donnée, à un Diametre indeterminé donné, une Ordonnée, & trouver le Diametre conjugué au Diametre donné.

POUR tirer par le point donné I, de l'Hyperbole donnée K C I, une Ordonnée au Diametre donné C N, tirez par le Sommet C, du Diametre donné C N, la Touchante E G, par *Prop. I.* & à cette Touchante E G, par le point donné I, la parallele K I, qui ſera une Ordonnée au Diametre donné C N, par *Def. 11.* 49. Fig.

Pour tirer un Diametre conjugué au même Diametre donné C N, tirez par le centre O, de l'Hyperbole K C I, parallelement à la Touchante E G, le Diametre indéfiny P Q, qui ſera conjugué au Diametre donné C N, par *Def. 13.*

SCOLIE.

IL eſt évident que l'Ordonnée K I, eſt diviſée en deux également au point N, par ſon Diametre C N, à cauſe des deux lignes égales C E, C G, par *Coroll 1. Prop. VI.* & par conſequent des deux égales L N, M N, & des deux égales K L, I M, par *Prop. VI.*

Il eſt auſſi évident, que l'Axe conjugué P Q, diviſe ſon Ordonnée I F, qui doit être parallele au Diametre correſpondant C N, par *Def. 14.* en deux également au point Q, à cauſe des deux lignes égales I G, F H, par le *Coroll. 1.* de la Propoſition precedente,

49. Fig. & des deux égales GQ, HQ, chacune étant égale au demi-Diametre determiné OC, parce que ce demi diametre OC, diviſant en deux également la baſe EG, du Triangle EOG, par *Prop VI.* le côté GH, du Triangle GEH, eſt double du côté OC, du Triangle ſemblable CEO; ce qui fait que ce côté étant egal au côté QG, du Parallelograme OCGQ, ce même côté QG, eſt auſſi égal à la ligne QH.

COROLLAIRE.

AINSY vous voyez, que le Diametre d'une Hyperbole diviſe ſes Ordonnées en deux également, comme dans la Parabole & dans l'Ellipſe. D'où l'on tire une methode aiſée, pour trouver le centre & l'Axe d'une Hyperbole donnée, ſçavoir en tirant au dedans de cette Hyperbole deux paralleles quelconques, & en joignant leurs points de milieu par une ligne droite, qui ſera leur Diametre: & pareillement en tirant d'un autre côté, toûjours au dedans de l'Hyperbole, deux autres paralleles, & en tirant par leurs points de milieu une ligne droite, qui ſera leur Diametre, & rencontrera le premier au centre de l'Hyperbole; par le moyen duquel on trouvera l'Axe, en décrivant du centre de l'Hyperbole un arc de cercle au dedans de la même Hyperbole, & en diviſant cét arc en deux également par une ligne droite tirée du centre, laquelle ſera l'Axe qu'on cherche.

PROPOSITION IX.

Si par un point d'une Hyperbole on tire juſques aux Aſymptotes, deux paralleles aux memes Aſymptotes, & par un autre point auſſi juſques aux Aſymptotes; deux paralleles aux mêmes Aſymptotes; le Parallelograme qui ſe formera par les deux premieres paralleles, ſera égal à celui qui ſe formera par les deux dernieres,

JE dis, que ſi par les deux points C, D, de l'Hyperbole CBD, on tire aux deux Aſymptotes OF, OG, les paralleles CE, CF, DG, DH, terminées par les mêmes Aſymptotes OF, OG, le Parallelograme OECF, ſera egal au Parallelograme OGDH. 50. Fig.

Car, ſi l'on tire les deux Diagonales OC, OD, on connoîtra aiſément que les deux Triangles ODG, OCF, ſont égaux, à cauſe de l'Angle G, égal à l'Angle F, parce que les deux lignes, OG, DG, ſont paralleles aux deux CF, OF, & des deux côtez OG, DG, reciproquement proportionnels aux deux CF, OF, parce que le Rectangle OFC, eſt égal au Rectangle OGD, par *Prop. V.* C'eſt pourquoy les doubles de ces Triangles égaux OCF, ODG, ſçavoir les Parallelogrames OECF, OGDH, ſeront égaux auſſi. Ce qu'il faloit demontrer. *Demonſtration.*

COROLLAIRE.

IL ſuit de cette Propoſition, que ſi par les mêmes points C, D, on tire les deux Touchantes IK, LM,

50. Fig. les deux Triangles O L M, O I K, ſeront auſſi égaux, parce qu'ils ſont égaux aux Parallelogrames égaux O G D H, O E C F, à cauſe de la baſe O L, double de la baſe O G, & de la baſe O I, double de la baſe O F, les deux Touchantes I K, L M, étant diviſées en deux également aux points d'attouchement C, D, par *Prop. I.* ou par *Prop. VI.*

PROPOSITION X.

Le Quarré d'une Ordonnée à un Diametre indeterminé, terminée par ce Diametre & par l'Hyperbole, eſt au Rectangle ſous la partie du même Diametre, entre ſon Sommet & l'Ordonnée, & la ſomme de cette partie & du Diametre determiné correſpondant, comme le Quarré de la Touchante terminée par le Sommet & l'Aſymptote, au Quarré du demi-Diametre determiné.

51. Fig. JE dis, que le Quarré de l'Ordonnée C D, au Diametre indeterminé E K, dont H E, eſt le Diametre determiné, eſt au Rectangle H D E, comme le Quarré de la Touchante E F, terminée par le Sommet E, & l'Aſymptote O G, au Quarré du demi-Diametre determiné O E.

Demonſtration. Car, ſi on prolonge l'Ordonnée C D, juſqu'à ce qu'elle coupe les Aſymptotes O G, O I, aux points G, I, & l'Hyperbole L B H, encore au point H, les deux lignes D C, D H, ſeront égales, par *Prop. VIII.* & parce que les deux C G, H I, ſont auſſi égales, par

Coroll. 1. Prop. VI. les deux DG, DI, seront aussi égales; & parce que le Rectangle GHI, ou ICG, ou HGC, est égal au Quarré EF, par *Coroll. 3 Prop. VI.* & que le Quarré DG, est égal à CDq†HGC, par 6. 2. on aura DGq-EFq∽CDq. *51. Fig.*

Dans les Triangles semblables OEF, ODG, on a cette Analogie, DGq, EFq:: ODq, OEq; c'est pourquoy en divisant on aura celle-cy, DGq-EFq, EFq:: ODq-OEq, OEq; & si au lieu du premier terme DGq-EFq, on met le Quarré DC, qui luy a été demontré égal, & à la place du troisiéme ODq-OEq, le Rectangle HDE, qui luy est égal, par 6. 2. & qu'on permute, on aura cette autre Analogie, CDq, HDE:: EFq, OEq. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE.

ON demontrera de la même façon, que le Quarré d'une autre Ordonnée au même Diametre indeterminé EK, comme KL, est au Rectangle HKE, comme le Quarré de la même Touchante EF, au Quarré du même demi-Diametre OE. D'où il est aisé de conclure, que le Quarré de l'Ordonnée KL, est au Quarré de l'Ordonnée CD, comme le Rectangle HKE, au Rectangle HDE.

PROPOSITION XI.

Trouver le Parametre d'un Diametre indeterminé donné d'une Hyperbole donnée, dont le Diametre determiné correſpondant eſt auſſi donné.

43. Fig.

POUR trouver le Parametre du Diametre indeminé BD, de l'Hyperbole EBC, dont le Diametre determiné correſpondant eſt AB, tirez par le Sommet B, la Touchante indéfinie BG, par *Prop. I.* & ayant tiré au dedans de l'Hyperbole EBG, à la Touchante BG, une parallele quelconque CD, cherchez aux deux lignes AD, CD, une troiſiéme proportionnelle DR, & tirez par le point A, à la ligne BR, la parallele AG, qui donnera ſur la Touchante BG, le Parametre BG, qu'on cherche.

Demonſtration. Car, dans les Triangles ſemblables ABG, BDR, on a cette Analogie, BD, DR :: AB, BG; & en donnant aux deux premiers termes BD, DR, la hauteur commune AD, on aura celle-cy, ADB, ADR :: AB, BG; & ſi à la place du ſecond terme ADR, on met le Quarré CD, qui luy eſt égal, à cauſe de trois proportionnelles AD, CD, DR, par la conſtruction, on aura cette autre Analogie, ADB, CD*q* :: AB, BG. D'où il ſuit par *Def 15.* que la ligne BG, eſt le Parametre qu'on cherche. Ce qu'il faloit faire & demontrer.

La raiſon pour laquelle nous avons tiré à volonté au Diametre indeterminé BD, l'Ordonnée CD, eſt parce

parce que par la Proposition precedente, les Quarrez de toutes les Ordonnées CD, sont proportionnels à leurs Rectangles correspondans ADB. 43. Fig.

Nous pourrions icy demontrer que le Parametre BG, est le plus petit de tous, quand il appartient à un Axe; mais comme cette consideration n'est pas de grande consequence, nous n'en parlerons pas davantage.

SCOLIE.

Parce que nous avons cette Analogie, AB, BG :: ADB, CD*q*, si OK, est le second Diametre de AB, sçavoir une ligne moyenne proportionnelle entre le Diametre AB, & son Parametre BG, on pourra mettre à la place des deux premiers termes AB, BG, les deux AB*q*, OK*q*; & alors on aura cette autre Analogie, AB*q*, OK*q*:: ADB, CD*q*; & si à la place des deux derniers termes ADB, CD*q*, on met le Quarré du demi-Diametre OB, & le Quarré de la Touchante BI, qui sont en même raison, par la Proposition precedente, on aura cette autre Analogie, AB*q*, OK*q*:: OB*q*, BI*q*, & par consequent celle-cy, AB, OK:: OB, BI: où l'on voit, que puisque l'antecedent OB, est la moitié de l'antecedent AB, aussi le consequent BI, est la moitié du consequent OK, ou du second Diametre. 44. Fig.

COROLLAIRE I.

AINSI, vous voyez que toute la Touchante SI, terminée par les deux Asymptotes OF, OL, est égale au second Diametre du Diametre determiné AB, c'est-à-dire, moyenne proportionnelle entre le Diametre determiné AB, & son Parametre BG; c'est pourquoy,

51. Fig. ſi au Diametre determiné AB, & à la Touchante correſpondante SI, terminée par les deux Aſymptotes OF, OL, on trouve une troiſiéme proportionnelle, on aura le Parametre BG, qu'on cherche.

COROLLAIRE II.

TOUT au contraire, quand on aura le Parametre BG, du Diametre determiné AB, on pourra trouver les Aſymptotes OF, OL, en tirant par le Sommet B, la Touchante indéfinie SI, par *Prop. I.* & en prenant ſur cette Touchante SI, les deux lignes BI, BS, égales chacune à la moitié du ſecond Diametre OK, ou d'une moyenne proportionnelle entre le Diametre determiné AB, & ſon Parametre BG, pour tirer par les deux points S, I, du centre O, de l'Hyperbole EBC, les deux Aſymptotes OF, OL, leſquelles ſeront au même centre O, un Angle droit, lorſque le Diametre AB, ſera égal à ſon Parametre BG, & par conſequent à ſon ſecond Diametre OK, parce que dans ce cas les trois lignes OB, BI, BS, ſeront égales entre elles; ce qui rend l'Angle SOI, égal à la ſomme des deux S, I, & par conſequent droit.

PROPOSITION XII.

Le Quarré d'une Ordonnée à un Diametre indeterminé d'une Hyperbole, eſt égal à la ſomme du Rectangle ſous le Parametre & la partie du même Diametre, compriſe entre l'Ordonnée & l'Hyperbole, & d'un Rectangle ſemblable & ſemblablement poſé à la Figure du Diametre determiné correſpondant, & ayant pour baſe la même partie.

SUPPOSONS premierement, que le Diametre indeterminé BC, ſoit un Axe, en ſorte que AB, ſoit l'Axe determiné de l'Hyperbole BD; ſi l'on fait de l'Axe AB, & de ſon Parametre BG, le Rectangle ABGN, qui ſera la Figure de l'Axe AB, & qu'on prolonge une Ordonnée quelconque à l'Axe BC, comme CD, juſqu'à ce qu'elle coupe la Diagonale AG, en quelque point, comme en K, & le côté GN, en L, & que par le point K, on tire à l'Axe BC, la parallele KM, qui rencontre le Parametre BG, prolongé en M, pour avoir le Rectangle KMGL, ſemblable & ſemblablement poſé au Rectangle, ou à la Figure ABGN, par 24. 6. 52. Fig.

Je dis, que le Quarré de cette Ordonnée CD, eſt égal au Rectangle BCKM, ou à la ſomme du Rectangle CBGL, ſous le Parametre BG, & la partie interceptée BC, & du Rectangle KMGL, ſemblable & ſemblablement poſé à la Figure ABGN, & ayant pour baſe la ligne KM, égale à la même partie BC.

52. Fig. Demonstration. Car, puiſque par la generation, on a cette Analogie, AB, BG :: ACB, CD q; ſi au lieu des deux premiers termes AB, BG, on met les deux AC, CK, qui ſont en même raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables ABG, ACK, on aura cette autre Analogie, AC, CK :: ACB, CD q; & ſi aux deux premiers termes AC, CK, on donne la hauteur commune BC, on aura cette derniere Analogie, ACB, BCK :: ACB, CD q: où l'on voit, que puiſque les antecedens ſont égaux, les conſequens BCK, CD q, ſont égaux auſſi. Ce qu'il faloit demontrer.

53. Fig. La demonſtration ſera la même, bien que le Diametre BC, ne ſoit pas un Axe, pourvû que l'on change un peu la conſtruction, parce que l'Ordonnée CD, n'étant plus perpendiculaire à ſon Diametre BC, au lieu de la prolonger, comme il a eſté fait auparavant, il faut tirer du point C, au Diametre BC, la perpendiculaire CD, & faire un raiſonnement ſemblable au precedent.

SCOLIE.

LE Quarré de l'Ordonnée CD, eſt égal dans la *Parabole* au Rectangle CBGL; & comme il eſt plus grand dans l'*Hyperbole*, puiſqu'il a été demontré égal au Rectangle CBMK, cela a donné le nom d'*Hyperbole* à la courbe BD.

Si l'on ſuppoſe AB $\sim d$, BG $\sim p$, BC $\sim x$, & CD $\sim y$, on aura AC $\sim d \dagger x$, MG $\sim \frac{p}{d}x$, à cauſe des Triangles ſemblables ABG, KMG; & ſi l'on ajoûte MG $\sim \frac{p}{d}x$, à BG $\sim p$, on aura BM $\sim p \dagger \frac{p}{d}x$, laquelle étant multipliée par BC $\sim x$, on aura $px \dagger \frac{p}{d}xx$, pour le Rectangle CBMK, ou pour le Quarré yy, de l'Ordonnée

CD $\sim y$; ainſi on a cette Equation conſtitutive, 53. Fig.
$yy \sim px \dagger \frac{\square}{\div}$, telle que nous l'avons trouvée dans la proprieté generale.

PROPOSITION XIII.

Si par un point d'un Diametre indeterminé d'une Hyperbole, on tire au dedans de la même Hyperbole, une ligne parallele au Diametre conjugué du Diametre determiné correſpondant, & par un point de cette parallele pris au dedans de l'Hyperbole, au même Diametre, une autre parallele, qui rencontre les deux Hyperboles oppoſées ; le Rectangle ſous les parties de la premiere parallele, terminées par l'Hyperbole & la ſeconde parallele, ſera au Rectangle ſous la ſeconde parallele & ſa partie terminée par la même Hyperbole & la premiere parallele, comme le Parametre au Diametre determiné.

JE dis, que ſi par le point C, du Diametre indeterminé BC, de l'Hyperbole EBD, dont le centre 54. Fig.
eſt O, on tire la droite ED, parallele au Diametre LM, qui eſt conjugué au Diametre indeterminé BC, dont le Diametre determiné correſpondant eſt AB, & par le point F, de cette parallele DE, pris au dedans de l'Hyperbole EBD, au Diametre AB, une autre parallele FH, qui rencontre les deux Hyperboles oppoſées AH, BI, aux points H, I ; le Rectangle EFD, ſera au Rectangle HFI, comme le Parametre BG, à ſon Diametre determiné AB.

54. Fig. Demonstration. Car, si l'on tire des deux points H, I, à l'Ordonnée D E, les paralleles H P, Q I, elles seront aussi paralleles au Diametre conjugué L M, par les *Def. 11. 13.* & les deux lignes A P, B Q, seront égales, à cause des deux égales O P, O Q, & des deux égales O A, O B; & à cause de A C B ∽ O C q - O B q, & de A Q B ∽ O Q q - O B q, par 6. 2. on aura A C B - A Q B ∽ O C q - O Q q; & encore à cause de O C q - O Q q ∽ P C Q, par 6. 2. on aura A C B - A Q B ∽ P C Q.

Puisque par *Prop X.* on a cette Analogie, C D q, Q I q:: A C B, A Q B, ou C D q, C F q:: A C B, A Q B, en divisant, on aura celle-cy, C D q - C F q, C D q:: A C B - A Q B, A C B; & si au lieu du premier terme C D q - C F q, on met le Rectangle E F D, qui luy est égal, par 5. 2. & à la place du troisiéme A C B - A Q B, le Rectangle P C Q, ou H F I, qui luy a été demontré égal, & qu'on permute, on aura cette autre Analogie, E F D, H F I:: C D q, A C B; & si au lieu des deux derniers termes C D q, A C B, on met les deux B G, A B, qui sont en même raison, par *Prop. XI.* on aura cette derniere Analogie, E F D, H F I:: B G, A B. Ce qu'il faloit demontrer.

Si au lieu de prendre le point F, au dedans de l'Hyperbole E B D, on la prend au dehors, neanmoins toûjours sur l'Ordonnée E D, prolongée, le Theo-
55. Fig. reme sera encore veritable: c'est-à-dire, que le Rectangle E F D, sera au Rectangle H F I, comme le Parametre B G, à son Diametre determiné A B, dont la demonstration est si peu differente de la precedente, que ce seroit dire deux fois la même chose que d'en parler davantage.

PROPOSITION XIV.

Si on coupe un Cone par un Plan, qui étant perpendiculaire à la baſe du Triangle de l'Axe, coupe en dedans un côté du même Triangle, & en dehors l'autre côté prolongé au deſſus de la pointe du Cone, la Section ſera une Hyperbole.

JE dis, que ſi le Cone A B C D, eſt coupé par un Plan, lequel étant perpendiculaire à la baſe A C, du Triangle de l'Axe A B C, en ſorte que la Section L E, du Plan & du Triangle de l'Axe, coupe en dedans un côté B C, en L, & en dehors l'autre côté A B, prolongé au deſſus de la pointe du Cone en N, la Section M L D, du Cone & du Plan, ſera une Hyperbole, ſçavoir une figure où les Quarrez des Ordonnées à un Diametre indeterminé, ſont proportionnels aux Rectangles ſous les parties correſpondantes de ce Diametre, compriſes entre le Sommet & les Ordonnées, & la ſomme de ces mêmes parties, & du Diametre determiné correſpondant. 56. Fig.

Pour la demonſtration, coupez le Cone A B C D, par un Plan, qui paſſant entre les extrémitez L, E, du Diametre de Section L E, ſoit parallele à la baſe A B C, du Cone A B C D, pour avoir par cette Section le Cercle F I G K, dont le Diametre F G, étant la commune Section de ce Plan & du Triangle de l'Axe A B C, ſera parallele au Diametre A C, de la baſe A D C, du Cone A B C D. Tirez encore par les points oppoſez I, K, ou la Section M L D, ſe trouve coupée Demonſtration.

56. Fig. par le Cercle FIGK, la droite IK, qui ſera diviſée à Angles droits & en deux également par le Diametre LE, au point H, qui eſt la Section des deux lignes FG, LE. D'où il ſuit que la ligne HK, eſt une Ordonnée au Diametre indeterminé LE, qui ſera un Axe; & parce que la ligne DM, eſt auſſi diviſée à Angles droits & en deux également au point E, par le même Axe LE, il ſuit que la ligne DE, eſt auſſi une Ordonnée à l'Axe LE.

Puiſque les Quarrez des Ordonnées DE, KH, ſont dans la raiſon des Rectangles AEC, FHG, puiſqu'ils leur ſont égaux, par 35. 3. & que la raiſon des mêmes Rectangles AEC, FHG, eſt compoſée de celle de leurs baſes CE, GH, & de celle de leurs hauteurs AE, FH, par 23. 6. il ſuit que la raiſon des mêmes Quarrez DE, KH, eſt auſſi compoſée de celle des lignes CE, GH, ou des lignes LE, LH, qui ſont en même raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables LCE, LGH, & de celle des lignes AE, FH, ou des lignes NE, NH, qui ſont en même raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables NAE, NFH, & que par conſequent la raiſon des mêmes Quarrez DE, KH, eſt égale à celle des Rectangles correſpondans NEL, NHL, qui ſont auſſi dans la raiſon compoſée de celle des lignes LE, LH, & de celle des lignes NE, NH, par 23. 6. Ce qu'il faloit demontrer.

La ligne LN, eſt l'Axe determiné de l'Hyperbole MLD, à l'égard du Diametre indeterminé LE, parce qu'il ſe trouve terminé en N, par l'Hyperbole oppoſée qui ſe forme par la Section du Cone oppoſé, & du même Plan qui a formé l'Hyperbole MLN, &c.

PRO-

PROBLEME I.

Trouver par le calcul les Racines d'une Equation de deux & de trois dimenſions.

LA Methode dont je me ſers pour trouver en Nombres les Racines d'une Equation de deux & de trois dimenſions, eſt fondée ſur ce Theoreme general, qui nous apprend que la difference de deux Puiſſances quelconques regulieres & homogenes, eſt diviſible par la difference de leurs côtez.

Cela eſtant ſuppoſé, propoſons en premier lieu cette Equation quarrée xx+ax ∽ bb, *dont les deux Racines ſont repreſentées par la lettre* x. *Il eſt evident que ces deux Racines pourront eſtre facilement connuës, ſi on reduit l'Equation propoſée* xx+ax ∽ bb, *à une d'une ſeule dimenſion. Pour cette fin, diviſons-la par la quantité inconnuë* x, *pour avoir cette autre Equation* x+a ∽ $\frac{bb}{x}$, *laquelle ſeroit effectivement d'une ſeule dimenſion, ſi la quantité inconnuë* x *pouvoit diviſer le dernier terme* bb; *& afin que cette diviſion ſoit poſſible, mettons à la place de ce dernier terme* bb, *la difference de deux quarrez indeterminez, comme* yy-zz, *& pour la quantité inconnuë* x, *la difference* y-z, *des côtez de ces deux quarrez, & au lieu de l'Equation precedente,* x+a ∽ $\frac{bb}{x}$, *on aura celle-cy,* y-z+a ∽ y+z, *&c.*

Comme toutes les autres Equations de deux dimen-

ſions ſe peuvent reduire à une de meſme forme que la propoſée xx†ax ∽ bb ; *on voit aiſement que la Methode precedente eſt generale, & que le ſeul Theoreme precedent ſuffit pour tous les cas qui peuvent arriver. Neantmoins on peut ſe ſervir plus facilement pour les autres Equations de cét autre Theoreme, par lequel Nous apprenons que* la difference de deux Puiſſances quelconques regulieres & homogenes, eſt diviſible par la ſomme de leurs côtez, lorſque l'expoſant commun à ces deux Puiſſances eſt un Nombre pair : *Ou bien de celuy cy, par lequel nous ſçavons que* la ſomme de deux Puiſſances quelconques regulieres & homogenes eſt diviſible par la ſomme de leurs côtez, lorſque l'expoſant commun à ces deux Puiſſances eſt un Nombre impair, &c.

Propoſons en ſecond lieu cette Equation cubique xxx† aax ∽ bbb, *dont chacune des trois Racines eſt exprimée par la lettre* x. *Il eſt evident que ces trois Racines ſe pourroient aiſément connoiſtre, ſi l'Equation propoſée* xxx †aax ∽ bbb, *n'avoit que deux dimenſions. Et afin que cela arrive, diviſons-la par la quantité inconnuë* x, *pour avoir cette autre Equation,* xx†aa ∽ $\frac{bbb}{x}$, *qui ſeroit effectivement de deux dimenſions, ſi le dernier terme* $\frac{bbb}{x}$ *eſtoit diviſible par* x. *C'eſt pourquoy en ſe ſervant du premier Theoreme, on mettra* yyy-zzz *à la place de* bbb, *& y-z à la place de* x, *pour avoir cette autre Equation,* yy-zyz†zz†aa ∽ yy†yz†zz, &c.

Ceux qui entendront la nature des Equations, n'auront pas de peine à trouver la demonſtration des trois Theoremes precedens.

PROBLEME II.

Nouvelle Methode pour ce qu'on appelle communément *Les Plus Grands & Les Plus Petits.*

POUR *resoudre un Probleme touchant* Les Plus Grands & Les Plus Petits, *on égalera la quantité qu'on veut rendre la plus grande ou la plus petite de toutes, à quelque autre quantité homogene indeterminée. Aprés quoy on trouvera par le calcul une des Racines de l'Equation, & dans la valeur de cette Racine on fera évanoüir l'assymmetrie qui s'y rencontrera, en l'égalant à* 0, *pour trouver dans cette derniere Equation la valeur de la quantité indeterminée, & par consequent celle de la Racine precedente, qui resoudra le cas du* Plus Grand *ou du* Plus Petit.

Si l'on ne peut pas supputer une des Racines de l'Equation, pour avoir trop de dimensions, on la reduira en deux Lieux, *& supposant que ces deux* Lieux *ou* Lignes Locales *se touchent, comme si on vouloit faire la determination du Probleme, on trouvera aisément la valeur de la quantité inconnuë, qui resoudra le cas du* Plus Grand, *ou du* Plus Petit.

Nous pourrions expliquer cette Methode plus au long par quelques exemples ; mais ce n'est pas icy le lieu d'en dire davantage.

PROBLEME III.

Connoiſtre les Cas infinis, auſquels un Probleme ſolide peut eſtre Plan.

SI on diviſe l'Equation conſtitutive du Probleme ſolide par un Binome compoſé de la quantité inconnuë & d'une partie de l'Homogene de comparaiſon, & qu'il ne reſte rien, ou que s'il reſte quelque choſe, on égale ce reſte à 0, *pour le faire évanouïr, afin que la diviſion ſoit poſſible; on aura le cas du* Probleme plan. *Et comme l'on peut choiſir une infinité de Diviſeurs, on voit que par cette Methode on peut découvrir generalement parlant, une infinité de cas du Probleme plan.*

L'Equation ſuivante, xxx-3aax+2aaa-abb ∽ 0, *appartient à un Probleme ſolide, & il eſt propoſé de trouver les cas infinis auſquels il peut eſtre plan. On voit déja que ſi on égale à* 0, *l'Homogene de comparaiſon* 2aaa-abb *à* 0, *on trouvera* bb ∽ 2aa, *auquel cas le Probleme doit eſtre plan. Mais pour venir à noſtre Methode generale, diviſez l'Equation propoſée* xxx-3aax+2aaa-abb ∽ 0, *par* x-a. *Et comme il reſte* -abb, *égalez ce reſte à* 0, *en ſuppoſant que la quantité* b *ſoit de nulle valeur, & non pas la quantité* a, *parce que cette quantité* a *ſe rencontrant dans les autres termes de l'Equation, elle les feroit tous évanouïr, & donneroit un cas impoſſible. Ainſi lorſque la quantité* b *n'aura aucune valeur, on conclura que dans ce cas le Probleme ſera plan.*

Pareillement ſi on diviſe la meſme Equation, xxx-3aax+2aaa-abb ∽ 0, *par* $x-\frac{1}{1}a$, *& qu'on égale à*

o, *le reſte* $\frac{1}{8}$ aaa-abb, *on trouvera* bb ∽ $\frac{1}{8}$ aa, *pour un troiſiéme cas du Probleme plan.*

On peut auſſi connoiſtre par la reſolution Geometrique d'un Probleme ſolide, les cas auſquels il peut eſtre plan; mais ce n'eſt pas icy le lieu d'en parler davantage. Cette Methode eſt expliquée par pluſieurs exemples dans noſtre grand Traité d'Algebre.

PROBLEME IV.

Trouver quatre Nombres, tels que leur ſomme ſoit égale à un Nombre donné, & que la difference de deux quelconques ſoit un Nombre quarré.

BIEN *que ce Probleme ne ſoit pas difficile, neanmoins parce qu'il a eſté propoſé à Meſſieurs de l'Academie Royale des Sciences, & qu'ils ont bien voulu prendre la peine d'y travailler; j'ay bien voulu auſſi expliquer icy les Methodes differentes, dont je me ſers pour le reſoudre.*

On propoſe de trouver quatre Nombres,

lx
ly
lz
lω

dont la ſomme lx†ly†lz†lω, *ſoit égale au Nombre donné* lc ∽ 5, *& tels que leurs ſix differences,*

ly...lx
lz...lx
lω...lx
lz...ly

$$l\omega \ldots ly$$
$$l\omega \ldots lz$$

ſoient des Nombres quarrez.

Si on égale la premiere difference $ly \ldots lx$, *au quarré* pp, *la deuxiéme* $lz \ldots lx$, *au quarré* qq, *& la troiſiéme* $l\omega \ldots lx$, *au quarré* rr; *on aura* $ly \backsim lx \dagger pp$, $lz \backsim lx \dagger qq$, *&* $l\omega \backsim lx \dagger rr$. *Ainſi les quatre Nombres qu'on cherche, ſeront*

$$lx$$
$$lx \dagger pp$$
$$lx \dagger qq$$
$$lx \dagger rr$$

dont la ſomme $4lx \dagger pp \dagger qq \dagger rr$ *eſtant égalée au Nombre donné* lc, *on trouvera* $lx \backsim lc - \frac{pp \cdot qq \cdot rr}{4}$, *& les quatre Nombres ſeront*

$$\tfrac{1}{4}lc - \tfrac{pp \cdot qq \cdot rr}{4}$$
$$\tfrac{1}{4}lc \dagger \tfrac{pp \cdot qq \cdot rr}{4}$$
$$\tfrac{1}{4}lc - \tfrac{pp \dagger qq \cdot rr}{4}$$
$$\tfrac{1}{4}lc - \tfrac{pp \cdot qq \dagger rr}{4}$$

& les trois dernieres differences ſe changeront en ces trois autres

$$pp - qq$$
$$pp - rr$$
$$qq - rr$$

qui font connoiſtre que les trois quarrez pp, qq, rr, *doivent eſtre tels, que la difference de deux quelconques ſoit un Nombre quarré; ce qui arrivera, ſi les coſtez* p, q, r, *ſont tels, que la ſomme & la difference de deux quelconques ſoit un Nombre quarré. Il s'agit donc icy de* trouver trois Nombres, tels que la ſomme & la difference de deux

quelconques, ſoit un Nombre quarré, *pour les trois coſtez* p, q, r. *Nous avons autrefois publié la ſolution de ce Probleme, & nous avons donné ces trois Nombres indefinis,*

$a^{10} + 21a^{16}b^4 - ba^{11}b^3 - 6a^8b^{12} + 21a^4b^{16} + b^{20}$.
$10aab^{18} - 24a^6b^4 + 60a^{10}b^{10} - 24a^{14}b^4 + 10a^{18}bb$.
$6aab^{18} + 24a^6b^{14} - 92a^{10}b^{10} + 24a^4b^6 + 6a^{14}bb$.

C'eſt-pourquoy ſi l'on met ces trois Nombres indefinis à la place des trois coſtez p, q, r, *la Queſtion ſera reſoluë indefiniment. Mais pour éviter un long calcul, ſuppoſez* a ∽ 2, *&* b ∽ 1, *ou* a ∽ 1, *&* b ∽ 2, *& vous aurez*

2399057
2288168
1873432

pour les trois coſtez p, q, r. *Si donc on ſuppoſe*

p = 2399057
q = 2288168
r = 1873432

& par conſequent

pp = 5755474489249
qq = 5235712796224
rr = 3509747458624

les quatre Nombres qu'on cherche, ſeront

$\frac{1}{4}1c - \frac{14500934744097}{4}$
$\frac{1}{4}1c + \frac{8120963212899}{4}$
$\frac{1}{4}1c + \frac{6442916440792}{4}$
$\frac{1}{4}1c - \frac{4612449609601}{4}$

Mais parce que le Nombre donné 1c *ou* 5, *eſt trop petit, changeons ces quatre Nombres trouvez, en ces quatre autres,*

$$\frac{1}{4}\text{lc} - \frac{145009347440997}{4\,\text{m m}}$$
$$\frac{1}{4}\text{lc} + \frac{85209632112899}{4\,\text{m m}}$$
$$\frac{1}{4}\text{lc} + \frac{64419164407999}{4\,\text{m m}}$$
$$\frac{1}{4}\text{lc} - \frac{46194490960 1}{4\,\text{m m}}$$

dont le premier montre que le quarré indeterminé m m *doit eſtre plus grand que* $\frac{145009347440997}{\text{lc}}$, *ou bien que* $\frac{147009347440997}{5}$, *à cauſe du Nombre donné* lc ∽ 5. *Si donc on ſuppoſe par exemple* m ∽ 5000000, *les quatre Nombres qu'on cherche, ſeront exprimez par quatre fractions, dont le Denomi. iteur commun ſera* 10000000000000, *& les Numerateurs ſeront*

$$\begin{array}{r} 110499065255903 \\ 133520963212899 \\ 131441916440799 \\ 124538055090399 \\ \hline 5.000000000000000 \end{array}$$

Il eſt evident que leur ſomme eſt égale au Nombre donné 5, *& que leurs ſix differences*

$$\begin{array}{rl} 2302189795996 & \text{—} 4798114 \\ 2094285118496 & \text{—} 4576336 \\ 1403898983496 & \text{—} 3746864 \\ 207904677100 & \text{—} 144899 \\ 89821908122500 & \text{—} 2997150 \\ 69038613504 00 & \text{—} 2627520 \end{array}$$

ont leurs Racines quarrées, telles que vous les voyez marquées à la droite.

Je ne m'arreſteray pas icy à vous enſeigner la maniere de trouver les trois Nombres precedens indefinis, parce que Nous l'avons déja publiée depuis environ neuf ou dix années, & que vous la pourrez trouver dans noſtre Diophante, lorſqu'il aura le bonheur de paroiſtre. Mais on peut autrement & plus facilement rendre quarrées les trois dernieres differences,

$$\begin{array}{l} \text{pp} - \text{qq} \\ \text{pp} - \text{rr} \\ \text{qq} - \text{rr} \end{array}$$

en cette ſorte.

Formez

Formez de ax, *& de* by *ce triangle rectangle,*

2abxy, aaxx-bbyy, aaxx+bbyy.

& reciproquement de bx, *& de* ay, *ce triangle rectangle,*

2abxy, aayy-bbxx, aayy+bbxx.

& mettez la hauteur commune 2abxy, *pour le costé* r, *& les deux hypotenuses* aaxx+bbyy, aayy+bbxx, *pour les deux costez* p, q, *car ainsi les deux dernieres differences* pp-rr, qq-rr, *deviendront quarrées par la nature du Triangle rectangle, & la premiere* pp-qq, *se changera en cellecy,* $a^4x^4+b^4y^4-a^4y^4-b^4x^4$, *qu'il faut égaler au quarré, pour le costé duquel prenant* aaxx-bbyy, *on trouvera* $x \backsim \frac{ay}{b}$; *& comme cette valeur ne se trouve pas icy propre, supposez* $x \backsim z+\frac{ay}{b}$, *& vous aurez en entiers cette autre difference à égaler au quarré,*

$$\left.\begin{matrix} b^8 \\ -2a^4b^4 \\ +a^8 \end{matrix}\right\}y^4 \left.\begin{matrix} +4a^2b \\ -4a^3b^3 \end{matrix}\right\}y^3z \left.\begin{matrix} +6a^4bb \\ -6aab^4 \end{matrix}\right\}yyzz \left.\begin{matrix} +4a^3b^3 \\ -4ab^7 \end{matrix}\right\}yz^3 \left.\begin{matrix} +a^4b^4 \\ -b^8 \end{matrix}\right\}z^4$$

pour le costé duquel prenant

$$\left.\begin{matrix} a^4 \\ -b^4 \end{matrix}\right\}yy+2a^2byz \frac{+a^6bbzz-3aab^6zz}{a^4-b^4}$$

on trouvera en entiers

$$y \backsim b^9+6a^4b^5-3a^8b$$
$$z \backsim 4a^9-4ab^8$$

& par consequent $x \backsim a^9+6a^5b^4-3ab^8$;

& au lieu des trois costez p, q, r, *on aura ces trois autres*

$a^{20}+21a^{16}b^4-4a^{12}b^8-4a^8b^{12}+21a^4b^{16}+b^{20}$.

$10aab^{18}-24a^6b^{14}+64a^{10}b^{10}-24a^{14}b^6+10a^{18}bb$.

$92a^{10}b^{10}-24a^{14}b^6-24a^6b^{14}-6a^{18}bb-6aab^{18}$,

dont les quarrez sont tels, que la difference de deux quelconques, est un nombre quarré. C'est pourquoy si l'on met ces trois nombres indefinis à la place des trois costez p, q, r,

on aura une seconde solution indefinie : & pour éviter un long calcul, on pourra pareillement reduire ces trois costez en nombres, en donnant aux deux lettres a, b *telle valeur que l'on voudra. Comme si l'on suppose* a ∽ 2, *&* b ∽ 1, *on aura ces trois costez*

2399057.
2288168
187342

lesquels se rencontrant ici les mesmes qu'auparavant, on aura une solution en nombres tout-à-fait semblable à la precedente, en donnant 5000000 *à la quantité indeterminée* m.

On peut resoudre autrement & tres-facilement cette Question, en égalant la premiere difference ly...lx *au quarré* aa, *la quatriéme* lz...ly *au quarré* bb, *& la sixiéme* lω...lz *au quarré* dd, *pour avoir* ly ∽ lx-aa, lz ∽ ly-bb, *ou* lz ∽ lx-aa-bb, *&* lω ∽ lz-dd, *ou* lω ∽ lx-aa-bb-dd. *Ainsi les quatre nombres qu'on cherche, seront*

lx
lx-aa
lx-aa-bb
lx-aa-bb-dd,

dont la somme 4lx-3aa-2bb-dd *estant égalée au nombre donné* lc, *on trouvera* $lx \backsim \frac{1}{4}lc \dagger \frac{aa\dagger 2bb\dagger dd}{4}$, *& les quatre nombres seront*

$\frac{1}{4}lc \dagger \frac{aa\dagger 2bb\dagger dd}{4}$
$\frac{1}{4}lc - \frac{aa\dagger 2bb\dagger dd}{4}$
$\frac{1}{4}lc - \frac{aa-2bb\dagger dd}{4}$
$\frac{1}{4}lc - \frac{aa-2bb-3dd}{4}$

& la seconde, la troisiéme, & la cinquiéme difference se changeront en ces trois autres,

$$aa+bb$$
$$aa+bb+dd$$
$$aa+dd$$

que l'on rendra quarrées, en cette ſorte.

Formez de pq *&* rſ *ce triangle rectangle*

$$2pqr\text{ſ}, ppqq-rr\text{ſ}\text{ſ}, ppqq+rr\text{ſ}\text{ſ},$$

& reciproquement de pr *&* qſ, *ce triangle rectangle;*

$$2pqr\text{ſ}, pprr-qq\text{ſ}\text{ſ}, pprr+qq\text{ſ}\text{ſ}.$$

& mettez la hauteur commune $2pqr\text{ſ}$ *pour la lettre* b, *& les deux coſtez* $ppqq-rr\text{ſ}\text{ſ}$, $pprr-qq\text{ſ}\text{ſ}$, *pour les deux autres lettres* a, b; *car ainſi les deux differences* $aa+bb$, $aa+dd$, *deviendront quarrées par la nature du triangle rectangle; & il n'y aura plus qu'à égaler au quarré l'autre difference* $aa+bb+dd$, *ou* $p^4q^4+r^4\text{ſ}^4+p^4r^4+q^4\text{ſ}^4$, *pour le coſté duquel prenant* $ppqq+rr\text{ſ}\text{ſ}$, *on trouvera* $\text{ſ}\backsim\frac{pr}{q}$; *& comme cette valeur ne ſe rencontre pas propre, ſuppoſez* $\text{ſ}\backsim y+\frac{pr}{q}$, *& vous aurez en entiers cette autre puiſſance à égaler au quarré,* $p^4q^8+2p^4q^4r^4+p^4r^8+4p^3q^5r^3y+4p^3qr^7y+6ppqqr^6yy+6ppq^6rryy+4pq^7ry^3+4pq^3r^5y^3+q^8y^4+q^4r^4y^4$, *pour le coſté duquel prenant* $ppq^4+ppr^4+2pqr^3y+qqrryy+\frac{2q^6rryy}{q^4+r^4}$, *on trouvera* $y\backsim\frac{4p^2r^4+pr^5}{6q^5r^4+3qr^9-q^9}$; *& au lieu de* $\text{ſ}\backsim y+\frac{pr}{q}$, *on aura* $\text{ſ}\backsim\frac{6pq^4r^5+3pq^8r-pr^9}{6q^5r^4+3qr^9-q^9}$; *& au lieu des quatre coſtez* pq, rſ, pr, qſ, *des quatre quarré-quarrez, dont la difference* $p^4q^4+r^4\text{ſ}^4+p^4r^4+q^4\text{ſ}^4$, *eſt compoſée, on aura en entiers & en moindres termes ces quatre autres,*

$$6q^6r^4+3qqr^8-q^{10}$$
$$6q^4r^6+3q^8rr-r^{10}$$
$$6q^5r^5+3qr^9-q^9r$$
$$6q^5r^5+3q^9r-qr^9.$$

& au lieu des quatre quarrez ppqq, rrſſ, pprr,

qqff, *on aura ces quatre*

$36q^{12}r^{8}+36q^{8}r^{12}+9q^{4}r^{16}-12q^{16}r^{4}-6q^{12}r^{8}+q^{20}$

$36q^{8}r^{12}+36q^{12}r^{8}+9q^{16}r^{4}-12q^{4}r^{16}-6q^{8}r^{12}+r^{20}$

$30q^{10}r^{10}+36q^{6}r^{14}+9qqr^{18}-12q^{14}r^{6}+q^{18}rr$

$30q^{10}r^{10}+36q^{14}r^{6}+9q^{18}rr-12q^{6}r^{14}+qqr^{18}$,

Et enfin au lieu des trois coſtez ppqq-rrff, pprr-qqff, 2pqrf, *on aura ces trois autres*,

$21q^{4}r^{16}-21q^{16}r^{4}-6q^{12}r^{8}+6q^{8}r^{12}+q^{20}-r^{20}$

$48q^{6}r^{14}-48q^{14}r^{6}+8qqr^{18}-8q^{18}rr$

$92q^{10}r^{10}+24q^{6}r^{14}+24q^{14}r^{6}-6q^{18}rr-6qqr^{18}$

pour les trois quantitez a, d, b. *Ainſi on pourra donner une ſolution indefinie. Mais pour éviter un long calcul, ſuppoſons* q ∽ 2, *&* r ∽ 1, *pour avoir*

pq= 628	ppqq= 394384	a= 350385
pr= 314	pprr= 98596	b= 108392 8
qf= 1726	qqff= 2979076	d= 288048 0.
ff= 863	rrff= 744769	

aa= 122769648225

bb= 11748999091 84

dd= 82973650304 00

& les quatre Nombres qu'on cherche, ſeront

$\frac{1}{4}lc+\frac{1101527379343}{4}$

$\frac{1}{4}lc+\frac{10524195200543}{4}$

$\frac{1}{4}lc+\frac{582459556 3807}{4}$

$\frac{1}{4}lc-\frac{2736406455779 3}{4}$

Et ſi au lieu de 4, *on met le quarré indeterminé* 4mm, *& au lieu de* lc, *le nombre donné* 5, *les quatre nombres ſeront tels*

$\frac{5}{4}+\frac{1101527379343}{4mm}$

$\frac{5}{4}+\frac{10524195200543}{4mm}$

$\frac{5}{4}+\frac{582459556 3807}{4mm}$

$\frac{5}{4}-\frac{2736406455779 3}{4mm}$

dont le dernier montre que le quarré indeterminé mm, *doit*

estre plus grand que $\frac{2736406455793}{5}$. *Ainsi supposant* m ∞ 10000000, *les quatre Nombres qu'on cherche, seront exprimez par quatre fractions, dont le Denominateur commun sera* 40000000000000, *& les Numerateurs seront*

5210152737934485
5105241952005433
5058245955563807
4726359354422207
20.0000000000000000

$\frac{}{4}$

il est evident que leur somme est égale au Nombre donné 5, *& que leurs six differences*

491078592900 — 700770
519067822963 6 — 2778306
383793383512 36 — 6195106
469959963673 6 — 2167856
378882597583 36 — 6155344
331886601216 00 — 5760960

ont leurs racines quarrées, telles que vous les voyez icy marquées à la droite.

Vous voyez par ces solutions differentes, que ce Probleme est aisé à celuy qui sçait trouver quatre Nombres, tels que la difference de deux quelconques soit un Nombre quarré; ce que nous avons enseigné en plusieurs manieres dans nostre Diophante.

Si l'on se sert de ces quatre Nombres

2399057
2288168
1873432
656.0657

dont les six differences

210889 — 333
414736 — 644
468722 5 — 2165
525625 — 725
416160 0 — 2040
427248 9 — 2067

ont leurs Racines quarrées, telles que vous les voyez marquées à la droite; on mettra

$$\frac{1}{4}x - \frac{2399057}{mm}$$
$$\frac{1}{4}x - \frac{2288168}{mm}$$
$$\frac{1}{4}x - \frac{1873432}{mm}$$
$$\frac{1}{4}x - \frac{6560657}{mm}$$

pour les quatre Nombres qu'on cherche ; car ainſi la difference de deux quelconques ſera un Nombre quarré, & il n'y aura plus qu'à égaler leur ſomme $x - \frac{13121314}{mm}$ *au Nombre donné* 5, *pour avoir* $x = \frac{13121314}{mm} + 5$, *& par conſequent* $\frac{1}{4}x = \frac{13121314}{4mm} + \frac{5}{4}$, *& les quatre Nombres qu'on cherche, ſeront tels,*

$$\frac{5}{4} + \frac{3252086}{4mm}$$
$$\frac{5}{4} + \frac{3968642}{4mm}$$
$$\frac{5}{4} + \frac{5627586}{4mm}$$
$$\frac{5}{4} - \frac{13121314}{4mm}$$

dont le dernier montre que le quarré mm *doit eſtre plus grand que* $\frac{13121314}{5}$. *Si donc on ſuppoſe* $m = 5000$, *les quatre Nombres qu'on cherche, ſeront quatre fractions, dont le Denominateur commun ſera* 100000000, *& les Numerateurs ſeront*

$$\begin{array}{r} 128525086 \\ 128968642 \\ 130627586 \\ 111878686 \\ \hline 500000000 \end{array}$$

Il eſt evident que leur ſomme eſt égale au Nombre donné 5, *& que leurs ſix differences*

$$\begin{array}{rl} 443556 & \text{---} \ 666 \\ 2102500 & \text{---} \ 1450 \\ 2664400 & \text{---} \ 4080 \\ 1658944 & \text{---} \ 1280 \\ 17089956 & \text{---} \ 4134 \\ 18748900 & \text{---} \ 4330 \end{array}$$

ont leurs Racines quarrées, telles que vous les voyez icy marquées à la droite.

Si vous voulez une ſolution plus generale & plus ſcien-

tisfique : ſervez-vous de ces quatre Nombres indefinis,

$a^{20} + 21a^{16}b^4 - 6a^{12}b^8 - 6a^8b^{12} + 21a^4b^{16} + b^{20}$.

$10aab^{18} - 24a^6b^{14} + 60a^{10}b^{10} - 24a^{14}b^6 + 10a^{18}bb$.

$6aab^{18} + 24a^4b^{14} - 92a^{10}b^{10} + 24a^{14}b^6 + 6a^{18}bb$.

$a^{20} + 16aab^{18} + 21a^{16}b^4 - 6a^{12}b^8 - 32a^{10}b^{10} - 6a^8b^{12} + 21a^4b^{16} + 16a^{18}bb + b^{20}$,

dont les ſix differences

$a^{20} - 6a^{18}bb + 21a^{16}b^4 - 24a^{14}b^6 - 6a^{12}b^8 + 92a^{10}b^{10} - 6a^8b^{12} - 24a^6b^{14} + 21a^4b^{16} - 6aab^{18} + b^{20}$.

$a^{20} - 10a^{18}bb + 21a^{16}b^4 + 24a^{14}b^6 - 6a^{12}b^8 - 60a^{10}b^{10} - 6a^8b^{12} + 24a^6b^{14} + 21a^4b^{16} - 10aab^{18} + b^{20}$.

$4aab^{18} - 48a^6b^{14} + 152a^{10}b^{10} - 48a^{14}b^6 + 4a^{18}bb$.

$16a^{18}bb - 32a^{10}b^{10} + 16aab^{18}$.

$a^{20} + 6a^{18}bb + 21a^{16}b^4 + 24a^{14}b^6 - 6a^{12}b^8 - 92a^{10}b^{10} - 6a^8b^{12} + 24a^6b^{14} + 21a^4b^{16} + 6aab^{18} + b^{20}$.

$a^{20} + 10a^{18}bb + 21a^{16}b^4 - 24a^{14}b^6 - 6a^{12}b^8 + 60a^{10}b^{10} - 6a^8b^{12} - 24a^6b^{14} + 21a^4b^{16} + 10aab^{18} + b^{20}$,

ont leurs Racines quarrées

$a^{10} - 3a^8bb + 6a^6b^4 + 6a^4b^6 - 3aab^8 + b^{10}$.

$a^{10} - 5a^8bb - 2a^6b^4 + 2a^4b^6 + 5aab^8 - b^{10}$.

$2ab^9 - 12a^7b^3 + 2a^3b$.

$4a^9 - 4ab^9$.

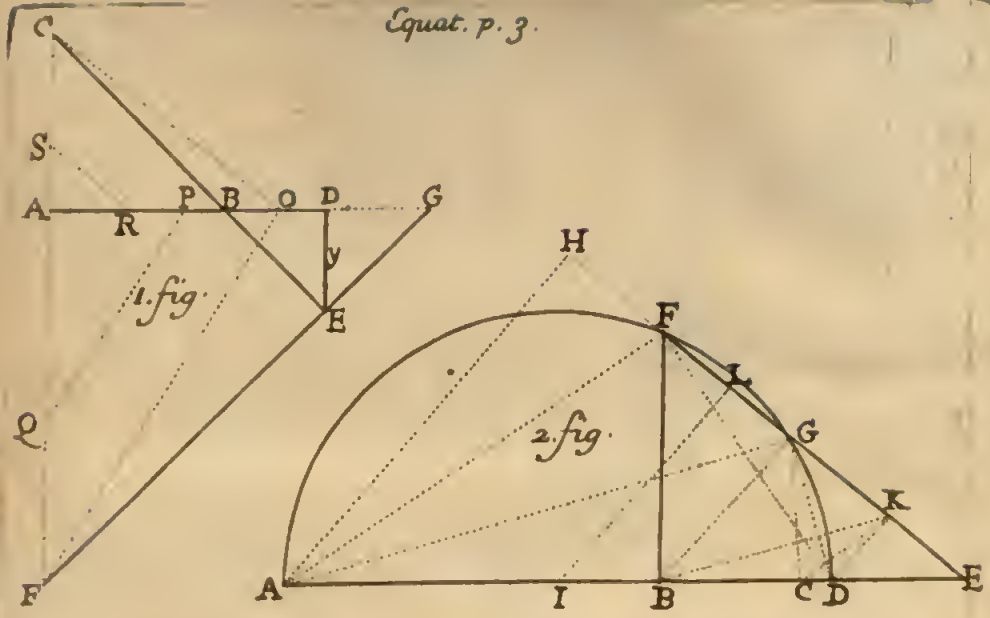
$a^{10} + 3a^8bb + 6a^6b^4 - 6a^4b^6 - 3aab^8 - b^{10}$.

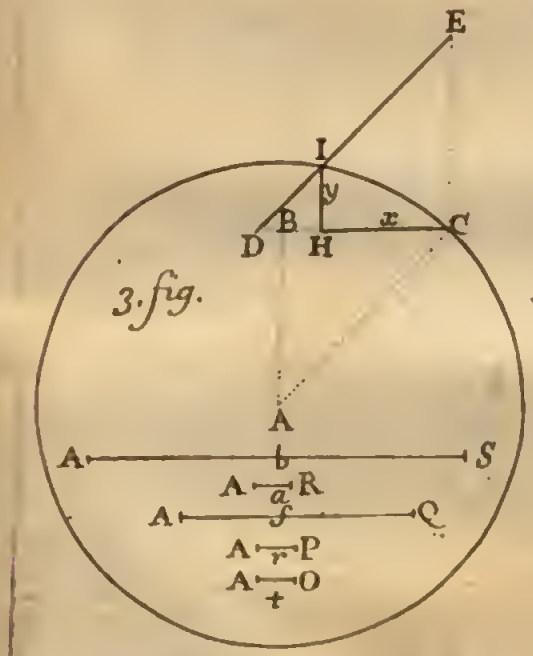
$a^{10} + 5a^8bb - 2a^6b^4 - 2a^4b^6 + 5aab^8 + b^{10}$,

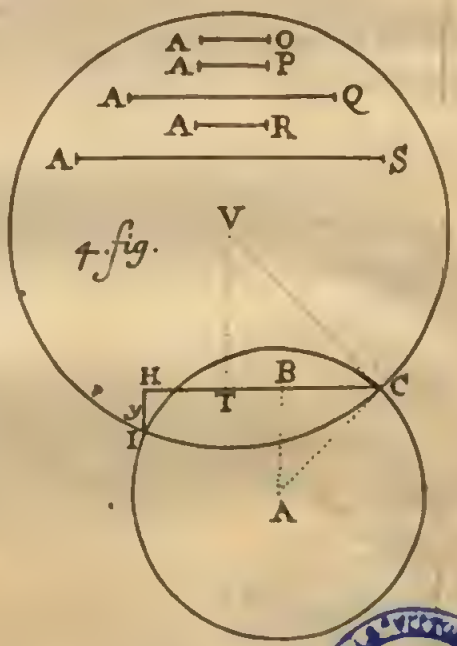
& achevez le reſte comme auparavant.

FIN.

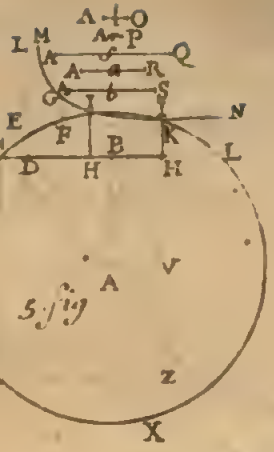
609369


C
S
A
R
P
B
O
D
G
y
E
Q
F
1. fig.
H
F
L
G
K
2. fig.
A
I
B
C
D
E

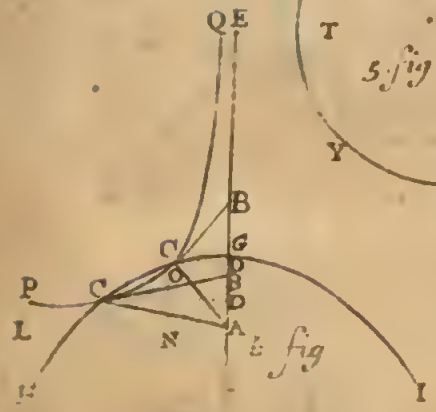

E
I
y
B
x
C
D
H
3. fig.
A
A
b
S
A
R
a
A
f
Q
A
P
r
A
O
t


A
O
A
P
A
Q
A
R
A
S
V
4. fig.
H
B
C
T
y
I
A

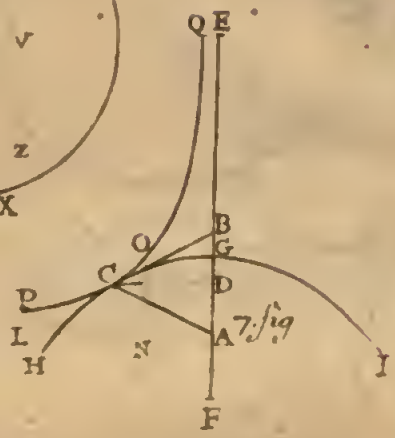
NAPOLI



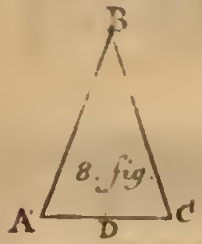
5. fig



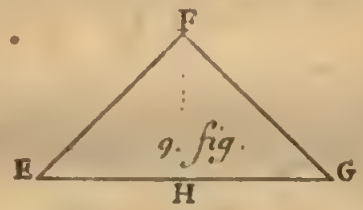
6. fig



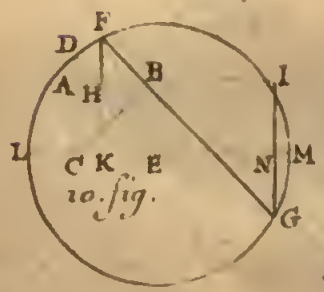
7. fig



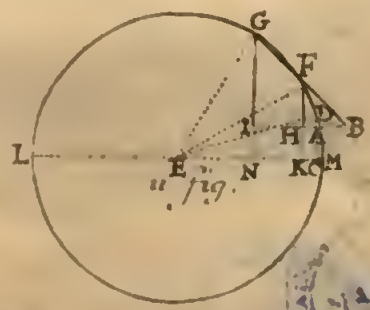
8. fig.



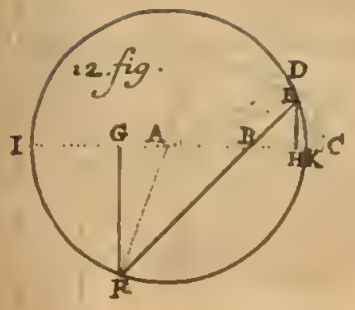
9. fig.

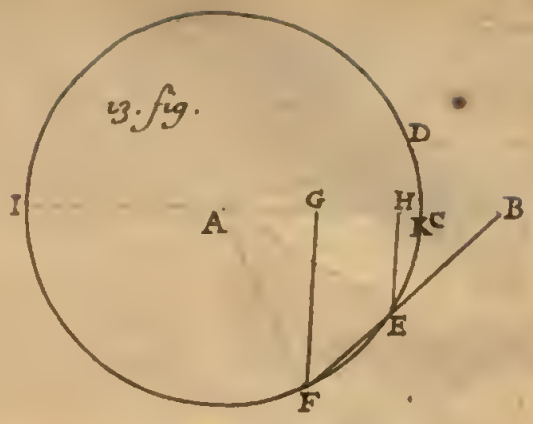


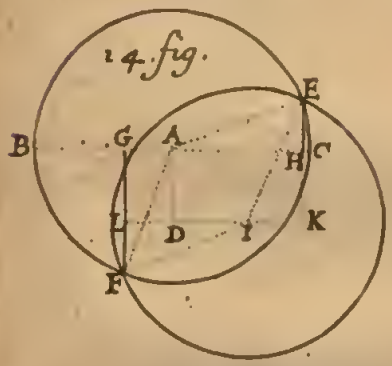
10. fig.

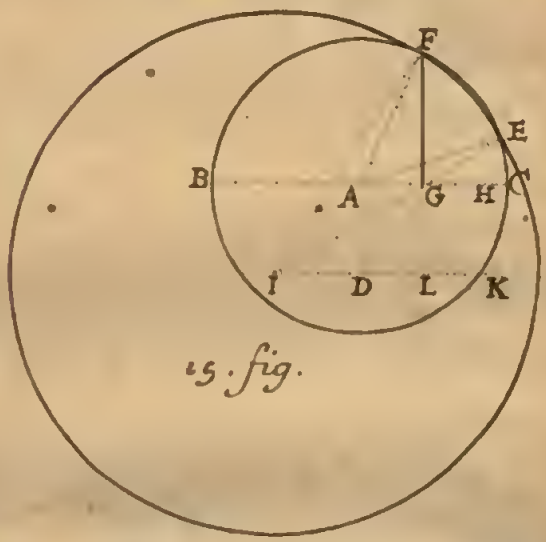


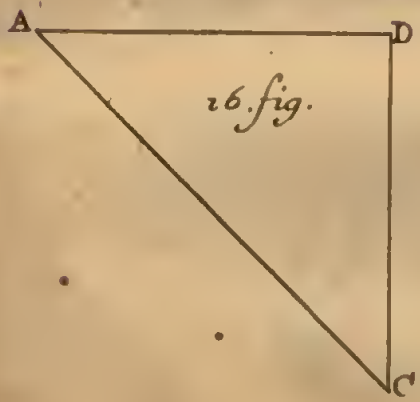
11. fig.

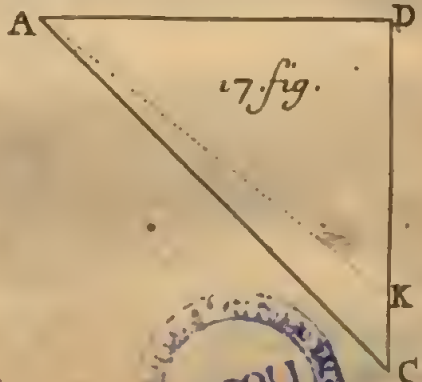

12. fig.
D
I
G
A
B
H
K
C
R

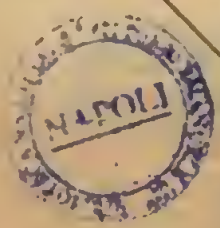

13. fig.
D
I
A
G
H
K
C
B
E
F


14. fig.
E
B
G
A
H
C
L
D
I
K
F

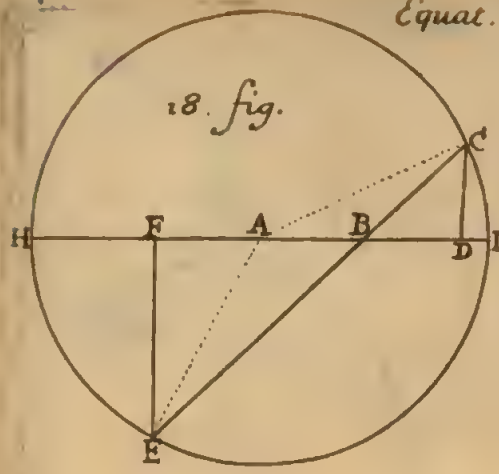

F
E
B
A
G
H
C
I
D
L
K
15. fig.


A
D
16. fig.
C

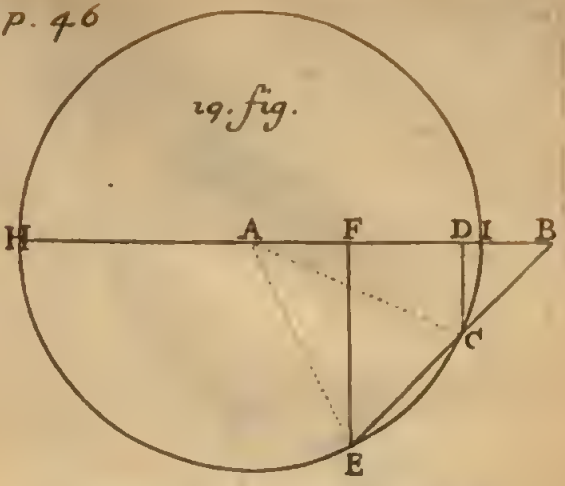

A
D
17. fig.
K
C



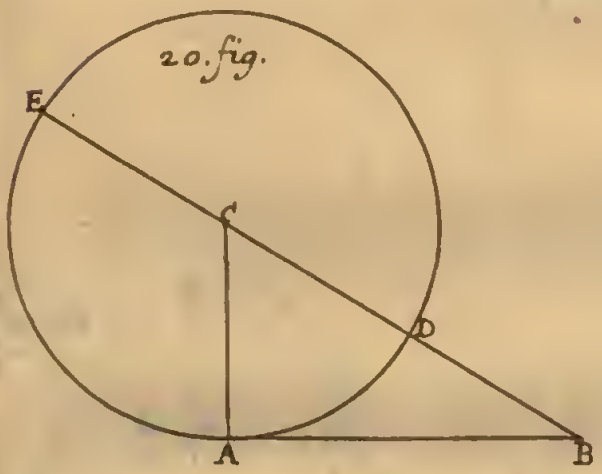
18. fig.



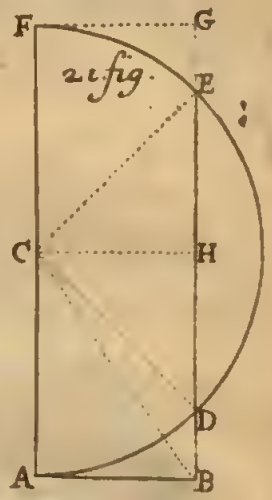
19. fig.



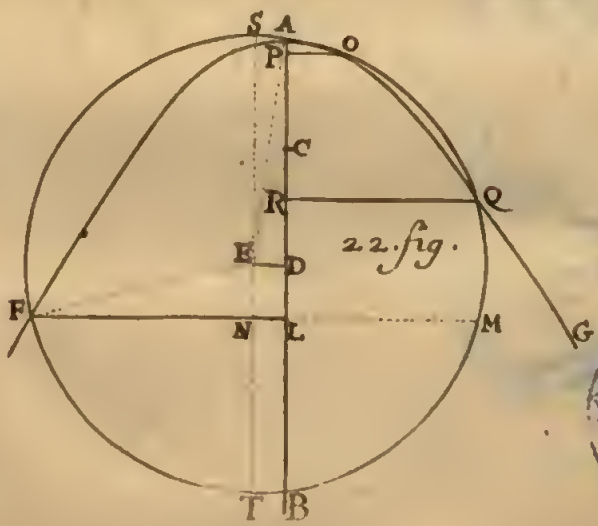
20. fig.



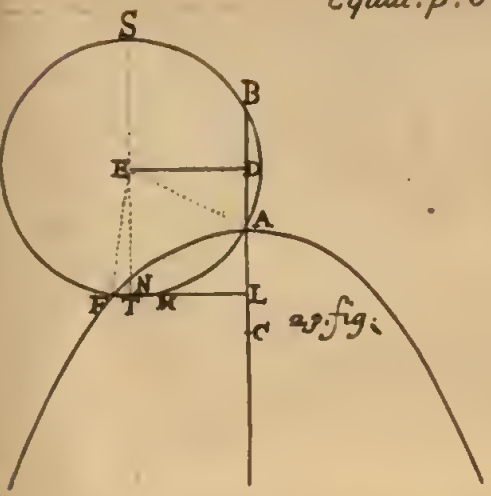
21 fig.



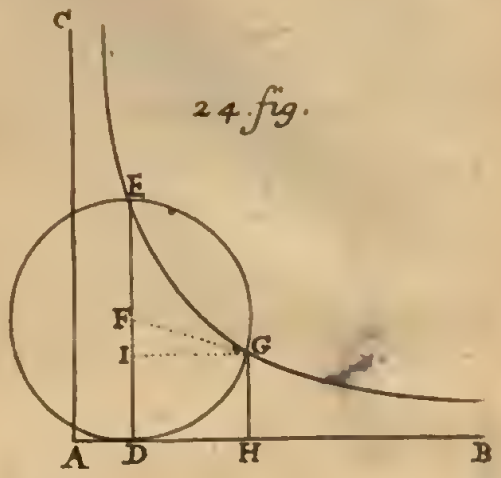
22. fig.



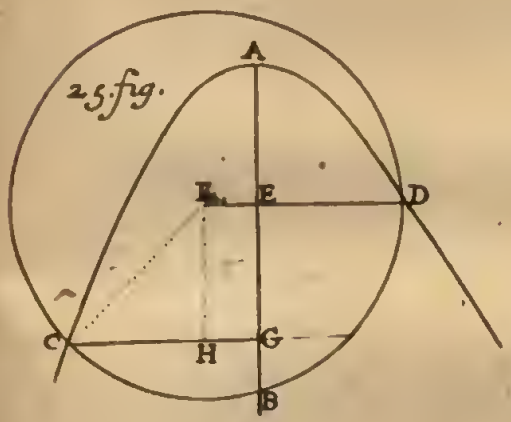
Equat. p. 69.



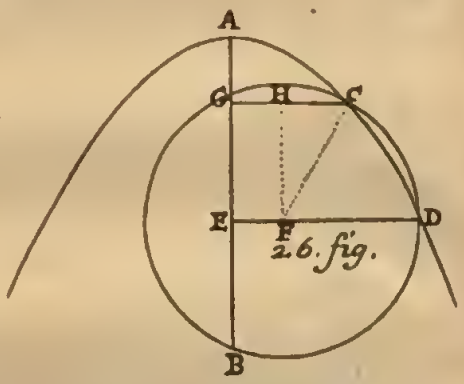
23. fig.



24. fig.

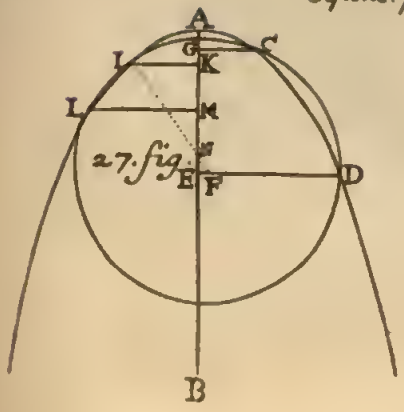


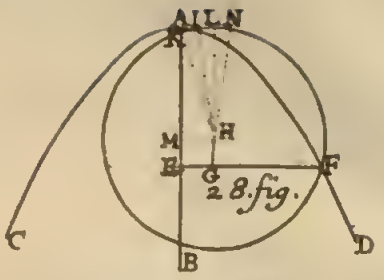
25. fig.

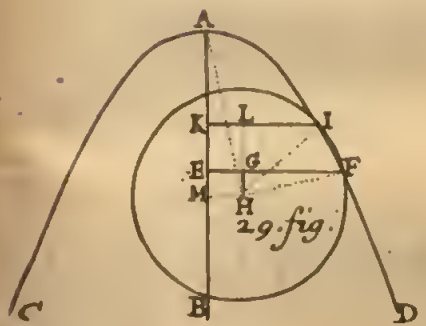


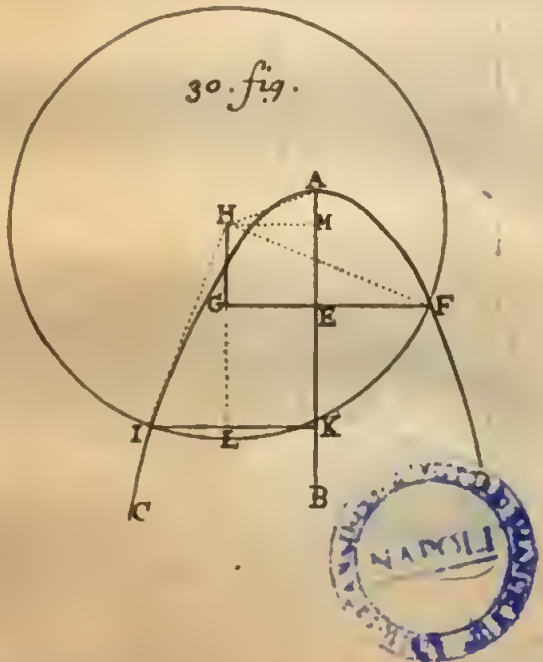
26. fig.

Equat. p. 74.

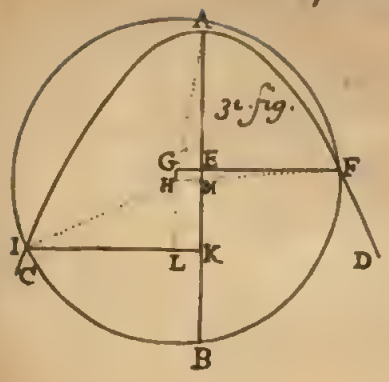

A
G
C
I
K
L
M
27. fig.
E
F
D
B


A I L N
K
M
H
E
G
F
28. fig.
C
D
B

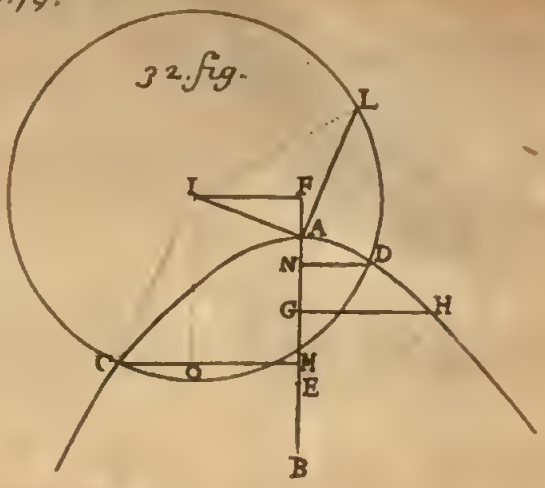

A
K
L
I
E
G
F
M
H
29. fig.
C
B
D


30. fig.
A
H
M
G
E
F
I
L
K
C
B

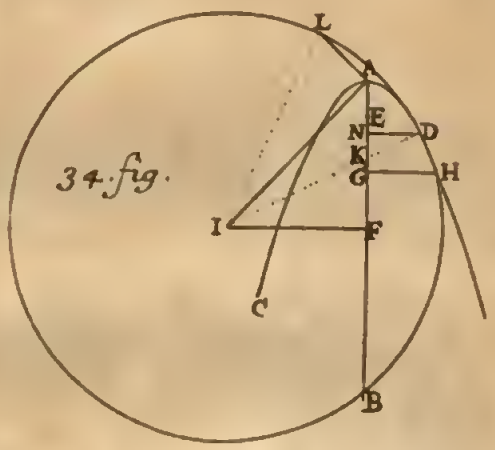
Equat. p. 79.



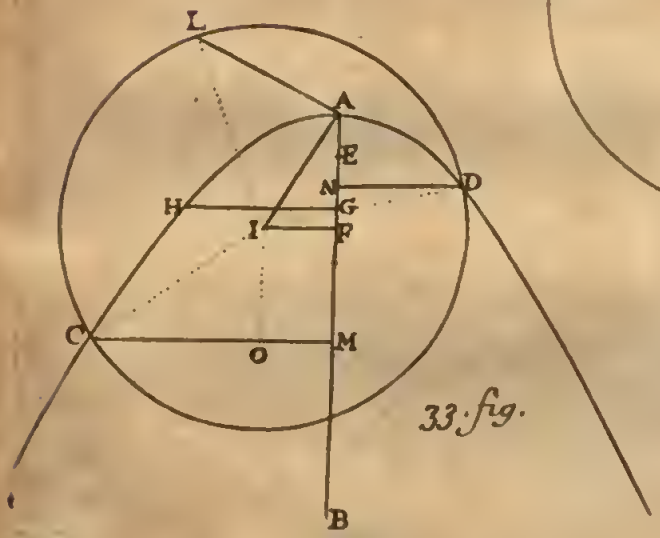
31. fig.



32. fig.

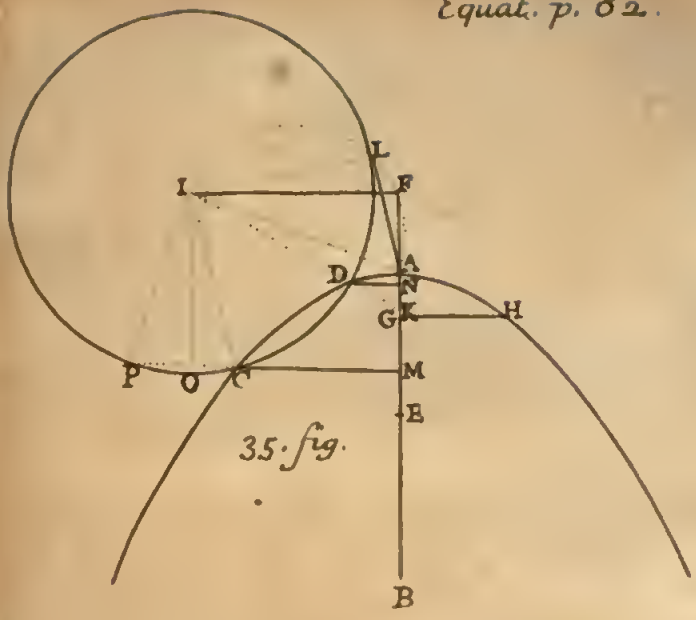


34. fig.

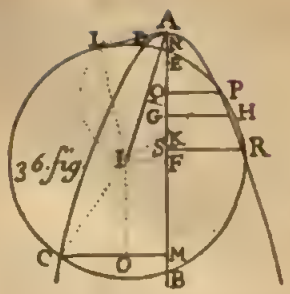


33. fig.

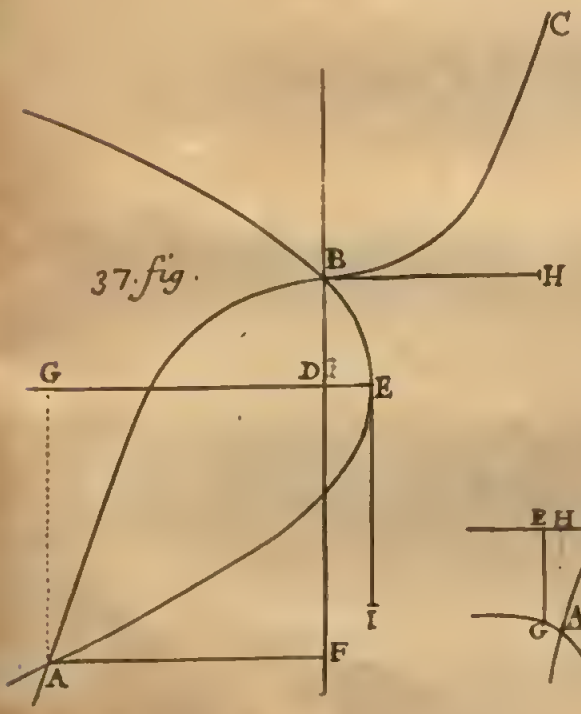
Equat. p. 82.



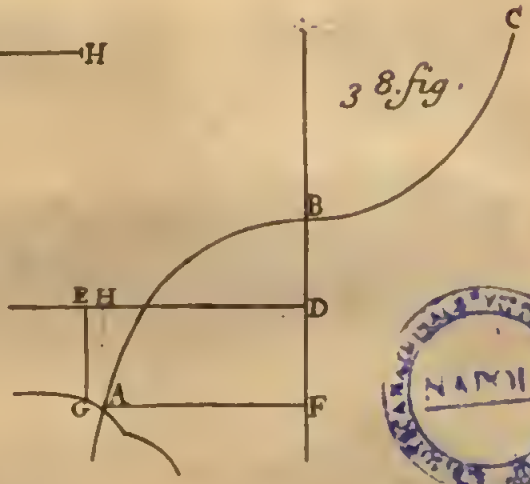
35. fig.



36. fig.

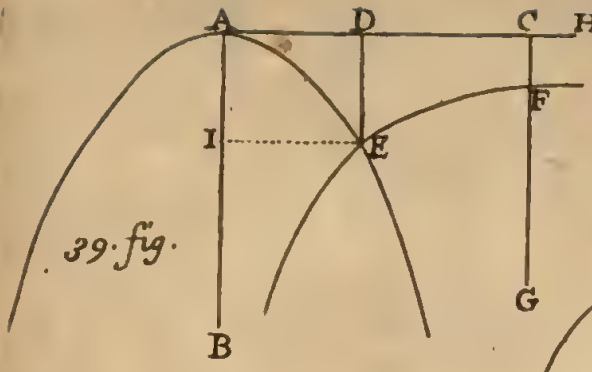


37. fig.

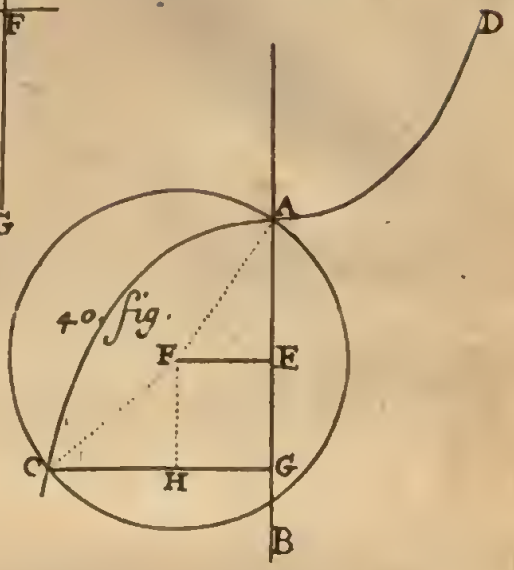


38. fig.

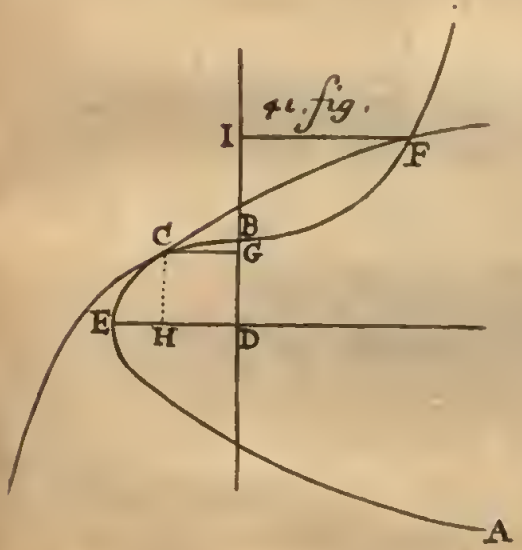
Equat. p. 89.



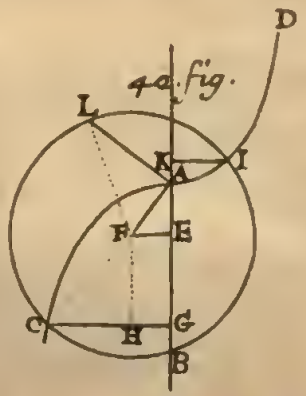
39. fig.



40. fig.



41. fig.



40. fig.

NAPOLI

60930

TRAITE'
DE
LA CONSTRUCTION
DES
EQUATIONS
Pour la Solution des Problemes indeterminez.

Par M. OZANAM, Professeur en Mathematique.

BIBLIOTHEQUE NATIONALE NANCY

A PARIS,
Chez ESTIENNE MICHALLET, ruë S. Jacques prés la Fontaine S. Severin, à l'Image S. Paul.

M. DC. LXXXVII.
AVEC PERMISSION.

68390

TRAITE'
DE
LA CONSTRUCTION
DES
EQUATIONS
Pour la Solution des Problemes indeterminez.

Par M. OZANAM, Professeur en Mathematique.

NAMUR

A PARIS,
Chez ESTIENNE MICHALLET, ruë S. Jacques prés la Fontaine S. Severin, à l'Image S. Paul.

M. DC. LXXXVII.
AVEC PERMISSION.

TRAITÉ

DE

LA CONSTRUCTION

DES

EQUATIONS.

AU LECTEUR.

CE n'eſt pas aſſez, *mon cher Lecteur*, de vous avoir donné quelques Queſtions au commencement du Traité precedent, pour vous faire voir l'uſage des Lieux Geometriques à l'égard des Problemes indeterminez; Il faut encore vous donner ce Traité, pour vous enſeigner l'uſage des mêmes Lieux Geometriques, touchant la Conſtruction Geometrique des Equations, ce qu'il faut ſçavoir faire pour reſoudre par Geometrie les Problemes determinez, comme vous verrez dans les Queſtions que nous ajoûtons au commencement de ce Traité, dont quelques-unes ont été tirées de nôtre Diophante, comme dans le Traité precedent, pour vous mieux faire comprendre la maniere de reſoudre par Geometrie les Problemes d'Arithmetique, en ſubſtituant

des lignes à la place des Nombres donnez, & en concevant des lignes d'une certaine quantité à la place des Nombres qu'on cherche, comme vous avez déja vû dans le Traité precedent, & comme vous verrez encore icy. Aprés quoy nous vous enseignerons plusieurs manieres nouvelles pour resoudre par deux Lieux les Equations de deux dimensions.

TRAITE'
DE
LA CONSTRUCTION
DES
EQUATIONS.

COMME tout Probleme poſſible en Geometrie ſe peut reſoudre par deux Lieux conformes à la Nature du Probleme, il faut ſçavoir reduire l'Equation conſtitutive de ce Probleme en deux Lieux, pour les pouvoir joindre enſemble, parce que l'interſection des deux *Lignes Locales* donnera les Racines de l'Equation propoſée, & par conſequent la Solution du Probleme, comme vous allez voir dans les Queſtions ſuivantes, que nous ajoûterons icy auparavant que d'entrer en matiere, pour vous mieux perſuader de l'utilité de ce Traité.

QUESTION I.

2. & 5. 2. Dioph. Probleme simple.

Trouver deux Nombres, tels que les raisons de leur difference & de leur somme à la difference de leurs Quarrez soient données.

POur resoudre cette Question par Geometrie, nous la proposerons plus generalement, en cette sorte; Trouver deux lignes, telles que les raisons du Rectangle sous leur difference & une ligne donnée, & du Rectangle sous leur somme & la même ligne donnée, à la difference de leurs Quarrez, soient données.

1. Fig. *On propose de trouver deux lignes* AD ∽ x, DE ∽ y, *en sorte que le Rectangle* lx-ly, *sous leur difference* x-y, *& la ligne donnée* AO ∽ l, *soit à la difference de leurs Quarrez* xx-yy, *comme* AP ∽ r, *à* AQ ∽ f, *& que le Rectangle* lx+ly *sous leur somme* x+y *& la même ligne donnée* AO ∽ l, *soit à la même difference des Quarrez* xx-yy, *comme* AR ∽ a, *à* AS ∽ b.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Analogies.

lx-ly, xx-yy :: r, f.
lx+ly, xx-yy :: a, b.

Dans la premiere on trouvera $y \backsim \frac{lf}{r} - x$, *qui est un Lieu à la ligne droite, & dans la seconde on trouvera la même* $x \backsim x - \frac{lb}{a}$, *qui est un autre Lieu à la ligne droite, lequel étant joint avec le premier donne la construction suivante.*

Construction. *Ayant fait à un angle quelconque les deux lignes* AF, AG, *égales chacune à* $\frac{lf}{r}$ *ou quatriéme proportionnelle aux trois lignes* AP, AQ, AO, *prolongez* AF *au dessus de*

AG, vers C, & faites les deux lignes AB, AC, égales chacune à $\frac{b}{a}$, ou quatriéme proportionnelle aux trois AR, AS, AO, Menez les deux lignes Locales BC, FG, & par leur point de section E, tirez à la ligne CF, la parallele DE, & les deux lignes AD, DE, seront les deux lignes qu'on cherche, de sorte que le Rectangle AOAD-AODE, sera au Rectangle ADq-DEq, comme AP, à AQ, & le Rectangle AOAD † AODE, au même Rectangle ADq-DEq, comme AR, à AS. 1. Fig.

Car puisque nous avons DG ∽ DE, à cause de AF égale à AG, & parallele à DE, par la construction, nous aurons AG égale à AD † DE, & on pourra faire cette analogie, AD, AD † DE :: AO, AG, & si à la place des deux derniers termes AO, AG, ou AO, AF, on met les deux AP, AQ, qui sont en même raison, par la construction, on aura celle-cy, AO, AD † DE :: AP, AQ, & si on donne aux deux premiers termes AO, AD † DE, la hauteur commune AD-DE, on aura cette derniere analogie, AOAD-AODE, ADq-DEq :: AP, AQ. Ce qui est l'une des deux choses qu'il faloit demontrer Demonstration.

De même puisque nous avons BD ∽ DE, à cause de AC égale à AB, & parallele à DE, par la construction, nous aurons AB ∽ AD-DE, & on pourra faire cette analogie, AO, AD-DE :: AO, AB, & si à la place des deux derniers termes AO, AB, ou AO, AG, on met les deux AR, AS, qui sont en même raison, par la construction, on aura celle-cy AO, AD-DE, :: AR, AS, & si aux deux premiers termes AO, AD-DE, on donne la hauteur commune AD † DE, on aura cette derniere analogie, AOAD † AODE, ADq-DEq ::

1. Fig. AR, AS, *Ce qui restoit à demontrer.*

Pour resoudre cette Question en Nombres, on considerera que puisque l'on a ces deux Equations, $y \backsim \frac{lf}{r} - x$, $y \backsim x - \frac{lb}{a}$, *on aura celle-cy*, $\frac{lf}{r}, x \backsim x - \frac{lb}{a}$, *dans laquelle on trouvera* $x \backsim \frac{lf}{ar} + \frac{lb}{la}$ *ou* $x \backsim \frac{f}{ar} + \frac{b}{la}$, *en prenant la lettre* l *pour l'unité, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,*

$$\frac{af + br,\ af\ br.}{aar}$$

Si $r \backsim 1$, $f \backsim 6$, $a \backsim 1$, *&* $b \backsim 2$, *les deux Nombres seront* 4, 2 : *Mais si* $r \backsim 1$, $f \backsim 7$, $a \backsim 1$, *&* $b \backsim 3$, *les deux Nombres seront* 5, 2.

Canon. *On tire de cette Solution indefinie, le Canon suivant. Si des quatre termes des deux raisons données* r, f, a, b, *on ajoûte & on ôte le plan sous les deux extrêmes du plan sous les deux moyens, & qu'on divise la somme & le reste chacun par le double du plan sous le premier & le troisiéme, on aura les deux Nombres qu'on cherche.*

Un Probleme simple, sçavoir celuy où la lettre inconnuë se trouve rationnelle, se peut aussi resoudre par l'intersection de la circonference d'un cercle & d'une ligne droite, comme s'il êtoit plan, comme vous allez voir dans le Probleme suivant.

QUESTION II.

2. Fig. Probleme simple. Couper la droite donnée AE, aux poins B, C, D, en sorte que le Rectangle ABD, soit au Rectangle ACD, comme le Quarré BE, au Quarré CE.

Supposant que le Probleme soit déja resolu, mettez.

AE $\backsim a$.

AB $\backsim x$.

BC $\backsim y$.

CD $\backsim z$.

CD ∽ z.
DE ∽ ω.

2. Fig.

Pour avoir

BD ∽ y†z.
AC ∽ x†y.
BE ∽ y†z†ω.
CE ∽ z†ω.

Et par conſequent

ABD ∽ xy†xz.
ACD ∽ xz†yz.
BEq ∽ yy†2yz†zz†2yω†2zω†ωω.
CEq ∽ zz†2zω†ωω.

Parce que l'on veut que les quatre Plans ABD, ACD, BEq, CEq, *ſoient proportionnels, on aura cette analogie,* xy†xz, xz†yz :: yy†2yz†zz†2yω†2zω†ωω, zz†2zω†ωω, *& en diviſant on aura celle cy,* xy-yz, xz†yz :: yy†2yz†2yω, zz†2zω†ωω, *& en diviſant les deux antecedens par* y, *on aura cette derniere analogie,* x-z, xz†yz :: y†2z†2ω, zz†2zω†ωω, *& conſequemment cette Equation,* xzz†2xzω†xωω-z³-2zzω-zωω ∽ xyz†2xzz†2xzω†yyz†2yzz†2yzω, *dans laquelle on trouvera* y ∽ -z-ω-½x†R.¼xx†xω†$\frac{2ωω}{2}$, *ou plus facilement* x ∽ $\frac{yyz†2yzz†2yzω†2zωω†2zzω†2z³}{ωω-yz-zz}$, *& par conſequent* y ∽ $\frac{aωω-azz-ωz³-2zωω-2zzω}{ωω†2zω†2z.}$ *à cauſe de* x†y†z†ω ∽ a, *& comme dans la valeur trouvée de* x, *la quantité* y *s'y trouve mêlée, ſi à la place de* y, *on ſubſtituë par tout ſa derniere valeur trouvée,* $\frac{aωω-azz-ωz³-2zωω-2zzω}{ωω†2zω†2z}$ *on aura une autre valeur de* x, *dans les mêmes lettres* a, z, ω, *dans leſquelles celle de la lettre* y *ſe trouve exprimée. Mais pour éviter un ſi long calcul, il vaudra mieux chercher cette ſeconde valeur de* x, *en ſubſtituant par tout dans l'E-*

2. Fig. *quation* $x+y+z+\omega \sim a$, *à la place de* y, *ſa premiere valeur trouvée* $-z-\omega-\frac{1}{2}x+$ R. $\frac{1}{4}$ $xx+x\omega+\frac{x\omega\omega}{2}$ *pour avoir cette autre Equation*, $\frac{1}{2}x+$ R. $\frac{1}{4}$ $xx+x\omega+\frac{x\omega\omega}{2} \sim a$, *dans laquelle on trouvera* $x \sim \frac{aaz}{\omega\omega+\omega z+az}$.

Ainſi les deux quantitez inconnuës x, y, *ſeront telles*, $\frac{aaz.\,a\omega\omega-2az-z\omega\omega\}\,2z\omega-zz\omega\omega}{\omega\omega+z\omega+az}$, *& comme il n'y a plus de conditions dans la Queſtion, pour determiner les deux autres quantitez inconnuës* z, ω, *on les prendra pour connuës, en coupant la ligne donnée* AE, *aux poins* C, D, *comme l'on voudra, pourvû que* z *ſoit plus grande que* $\frac{a\omega-\omega\omega}{a+\omega}$ *comme nous allons démontrer.*

* Demonſtration analytique. *Pour demontrer que* z *doit être moindre que* $\frac{a\omega-\omega\omega}{a+\omega}$, *afin que la Queſtion ſoit poſſible, on conſiderera qu'afin que la ligne* BC, *ou* y *ſoit poſitive, ſa valeur* $\frac{a\omega\omega\ azz\ a^3-zz-a\omega z\omega\omega}{\omega\omega+z\omega+az}$ *doit être plus grande que* o, *ce qui arrivera ſi les termes affirmez ſont plus grands que les niez, c'eſt à dire ſi le terme* $a\omega\omega$ *eſt plus grand que* $azz+\omega^3+zz\omega+z\omega\omega$, *& dans cette inégalité on trouvera* z *moindre que* $\frac{a\omega\omega}{a+\omega}$. *Ce qu'il faloit démontrer. Mais cela ſe demontrera geometriquement par l'attouchement des deux Lignes Locales, leſquelles par leur interſection peuvent reſoudre la Queſtion propoſée, & que nous trouverons en cette ſorte.*

Suppoſant donc que les deux quantitez z, ω, *ſoient connuës, les deux autres quantitez* x, y, *ſeront auſſi connuës; & la Queſtion ſera reſoluë puiſque le point* B *ſera determiné Mais comme la conſtruction que l'on tireroit de la valeur trouvée de* x, *ou de celle de* y, *pour determiner ce point* B, *qui reſte, ſeroit un peu longue, il ſera plûtôt fait de reſoudre le Probleme par l'interſection d'un cercle & d'une ligne droite, que l'on trouvera*

premierement en cette maniere 2. Fig.

Elevez des deux poins B, C, *à la ligne donnée* AE, *les perpendiculaires* BF, CG, *qui se trouveront terminées aux poins* F, G, *par le moyen d'une circonference de cercle, que l'on décrira du centre* I, *à l'entour du Diametre* AD, *afin que l'on puisse mettre quand on voudra, le Quarré* BF *à la place du Rectangle* ABD, *& le Quarré* CG *au lieu du Rectangle* ACE.

Cette preparation étant faite, supposez

AE ∽ *a.*
CG ∽ *b.*
CE ∽ *c.*
AD ∽ *d.*
AB ∽ *x.*
BF ∽ *y.*

Si on ôte AB ∽ x *de* AD ∽ d, *on aura* d-x *pour la ligne* BD, *laquelle étant multipliée par* AB ∽ x, *on aura* dx-xx *pour le Rectangle* ABD, *ou pour le Quarré* yy *de la ligne* BF ∽ y. *Ainsi on aura cette Equation* dx-xx ∽ yy, *qui est un Lieu au Cercle donné* AFGD.

Parce que le Rectangle ABD, *ou le Quarré* BF, *doit être au Rectangle* ACD, *ou au Quarré* CG, *comme le Quarré* BE, *au Quarré* CE, *les quatre côtez* BF, CG, BE, CE, *ou* y, b, a-x, c, *seront proportionnels, & l'on aura cette Equation*, cy ∽ ab-bx, *dans laquelle on trouvera* x ∽ a-$\frac{cy}{b}$, *qui est un Lieu à la Ligne droite, que l'on pourra joindre avec le Lieu au Cercle, par les preceptes du* Probl. III. *ou plus facilement en tirant de l'extremité* E *de la ligne donnée* AE, *par l'extremité* G *de la perpendiculaire* CG, *la Ligne Locale* EG, *qui coupe icy la circonference du Cercle Local* AFGD, Construction.

1. Fig. *au point* F, *duquel on tirera sur le Diametre* AD, *la perpendiculaire* FB, *& le Rectangle* ABD *sera au Rectangle* ACD, *comme le Quarré* BE, *au Quarré* CE.

Demonstration. *Car dans les Triangles semblables* FBE, GCE, *on a cette analogie*, BFq, CGq :: BEq, CEq, *& si à la place des Quarrez* BF, CG, *on met les Rectangles* ABD, ACD, *qui leurs sont égaux, par la nature du Cercle, on aura cette autre analogie*, ABD, ACD :: BEq, CEq. *Ce qu'il faloit demontrer.*

Demonstration Geometrique de la Determination. *Pour demontrer geometriquement la determination precedente, qui est que* z *doit être moindre que* $\frac{aa-ww}{a+w}$, *on considerera comme auparavant que la partie* BC *doit être positive. Pour cette fin, il ne faut pas que la droite* EG *touche la circonference du Cercle* AFGD, *parce que si ces deux Lignes Locales se touchoient, le point* F, *conviendroit avec le point* G, *& par consequent le point* B *avec le point* C, *ce qui rendroit la ligne* BC *infiniment petite, & dans ce cas le Rectangle* AED *seroit égal au Quarré de la touchante* EG, *ou à la somme des Quarrez* CG, CE, *ou du Rectangle* ACD *& du Quarré* CE, *c'est à-dire que selon la premiere analyse, on auroit cette Equation,* $aw = \frac{a^3w-2a^2ww-azzww-2azw^3+2azzw^2+2azz}{ww+2w+2z} + zz + 2zw + ww$, *dans laquelle on trouveroit* $z = \frac{aa-ww}{a+w}$: *& comme le Rectangle* AED, *est plus grand que le Quarré de la ligne* EG, *lorsqu'elle coupe le Cercle, puisqu'il est égal au Rectangle* FEG, *on conclud comme auparavant, que* z *doit être moindre que* $\frac{aa-ww}{a+w}$.

Ainsi vous voyez que la Determination d'un Probleme dépend de l'attouchement des deux Lieux constitutifs, ou des deux Lignes Locales, qui le peuvent resoudre, *comme vous verrez plus amplement dans*

nôtre Traité nouveau de Maximis & Minimis, *que nous publierons bien tôt, avec un autre Traité nouveau* des Touchantes. 2. Fig.

SCOLIE.

Theor. 1.

Si du point D, *on tire à la ligne* EF, *la perpendiculaire* DK, le Rectangle BDC, ſera égal au Quarré DK.

Demonſtration. *Car ſi l'on tire les droites* AF, DF, AG, DG, DF, CK, *on connoîtra aiſément que dans le Triangle Rectangle* AGD, *l'angle* CGD *eſt egal à l'angle* CAG, *& que le Trapeze* CGKD, *dont les deux angles oppoſez* C, K, *ſont droits, eſt dans un Cercle, & que par conſequent l'angle* CGD, *eſt égal à l'angle* CKD. *D'où il ſuit que les trois angles* CGD, CKD, CAG, *ſont égaux.*

On connoîtra auſſi facilement que le Trapeze BDKF, *dont les denx angles oppoſez* B, K, *ſont droits, eſt dans un Cercle, & que par conſequent l'angle* DFK *eſt égal à l'angle* DBK, *& parce que l'angle* DFK, *ou* DFG *eſt égal à l'angle* DAG, *ou* CAG, *il ſuit que les trois angles* CAG, DBK, DFK, *ſont égaux.*

De ce que les trois angles CGD, CKD, CAG, *ſont égaux, auſſi-bien que les trois* CAG, DBK, DFK, *il ſuit que les deux* CKD, DBK, *ſont pareillement égaux, & que par conſequent les deux triangles* CDK, BDK, *ſont ſemblables. C'eſt pourquoy on aura cette analogie,* BD, DK :: DK, CD, *& par conſequent cette Equation,* BDC ∽ DKq. *Ce qu'il faloit demontrer.*

Theor. 2. *De plus* le Rectangle ABCD, ſera égal au Quarré GK.

Demonſtration. *Car dans le Triangle Rectangle* AGD, *on a* ADC ∽ DGq, *& à cauſe de* AD ∽ AB†BD, *& de* DGq ∽ DKq†GKq, *on aura* ABCD†BDCD ∽ DKq†GKq,

2. Fig. *& ôtant* BDCD ∽ DKq, *par* Theor. 1. *il reſtera* AB CD ∽ GKq. *Ce qu'il faloit demontrer.*

Theor. 3. *Enfin* le Rectangle ACBD, ſera égal au Quarré FK.

Demonſtration. *Car dans le Triangle Rectangle* AFD, *on a* ADB ∽ DFq, *& à cauſe de* AD ∽ AC†CD, *& de* DFq ∽ DKq†FKq, *on aura* ACBD†BDCD ∽ DKq†FKq, *& ôtant* BDCD ∽ DKq, *par* Theor. 1. *on aura* AC BD ∽ FKq. *Ce qu'il faloit demontrer.*

Nous ajoûterons à ces trois Theoremes, encore les

Theor. 4. *deux ſuivans, dont le premier eſt que* le Rectangle BE CD eſt égal au Rectangle GKE.

Demonſtration. *Car dans le Triangle Rectangle* GCE, *on a* CGq† CEq ∽ GEq, *ou par* 4. 2. CGq†CDq†DEq†2CDE ∽ GKq†EKq†2GKE, *& à cauſe de* CGq†CDq ∽ DKq †GKq, *chaque ſomme étant égale à* DGq, *on aura* DKq†GKq†DEq†2CDE ∽ GKq†EKq†2GKE, *& ôtant* GKq, *on aura* DKq†DEq†2CDE ∽ EKq †2GKE, *& à cauſe de* DEq ∽ DKq†EKq, *on aura* 2DKq†EKq†2CDE ∽ EKq†2GKE, *& ôtant* EKq, *on aura* 2DKq†2CDE ∽ 2GKE, *& par conſequent* DKq†CDE ∽ GKE, *& encore à cauſe de* DKq ∽ BDC, *par* Theor. 1. *on aura* BDC†CDE ∽ GKE, *& enfin à cauſe de* BD†DE ∽ BE, *on aura* BECD ∽ GKE. *Ce qu'il faloit demontrer.*

Theor. 5. *Le ſecond Theoreme eſt que* le Rectangle BDCE eſt égal au Rectangle FKE.

Demonſtration. *Car dans le Triangle Rectangle* FBE, *on a* FBq† BEq ∽ EFq, *ou par* 4. 2. FBq†BDq†DEq†2BDE ∽ KFq†KEq†2FKE, *& à cauſe de* FBq†BDq ∽ KDq †KFq, *chaque ſomme étant égale à* DFq, *on aura* KDq

† KFq † DEq † 2BDE ∽ KFq † KEq † 2FKE, *& ôtant* KFq, *on aura* KDq † DEq † 2BDE ∽ KEq † 2FKE, *& à cauſe de* DEq ∽ KDq † KEq, *on aura* 2KDq † 2BDE ∽ KEq † 2FKE, *& ôtant* KEq, *on aura* 2KDq † 2BDE ∽ 2FKE, *& par conſequent* KDq † BDE ∽ FKE, *& encore à cauſe de* KDq ∽ BDC, *par* Theor. 1. *on aura* BDC † BDE ∽ FKE, *& enfin à cauſe de* DC † DE ∽ CE, *on aura* CEBD ∽ FKE. *Ce qu'il faloit demontrer.* 2. Fig.

On peut trouver d'autres Theoremes, qui peuvent ſervir dans le beſoin, en tirant d'autres lignes: comme ſi on tire du point A, *ſur la ligne* EF *prolongée, la perpendiculaire* AH, *on connoîtra aiſément que* la ligne FH eſt égale à la ligne GK. Theor. 6.

Car ſi l'on tire du centre I, *par le point* L, *milieu de* FG, *la droite* IL, *elle ſera perpendiculaire à la même* FG, *par* 3. 3. *& par conſequent parallele aux deux* AH, DK. *D'où il eſt aiſé de conclure que comme les deux lignes* IA, IH, *ſont égales, auſſi les deux* LH, LK, *ſeront égales, deſquelles ôtant les deux égales* LF, LG, *il reſtera la ligne* FH *égale à la ligne* GK. *Ce qu'il faloit demontrer. D'où il ſuit que la ſomme des deux lignes* FK, GK, *eſt égale à la ligne* HK. Demonſtration.

On connoîtra auſſi ſans peine, que le Rectangle AED, eſt au Rectangle BEC, comme le Quarré AD, au Quarré HK. Theor. 7.

Car dans les Triangles ſemblables FEB, GEC, *on a cette analogie*, EG, EF :: EC, EB, *& ſi aux deux premiers termes* EG, EF, *on donne la hauteur commune* EG, *& aux deux derniers* EC, EB, *la hauteur commune* EC, *on aura celle-cy*, EGq, FEG :: ECq, BEC, Demonſtration.

2. Fig. *ou* FEG, BEC :: EGq, ECq, *& ſi à la place des deux derniers termes* EGq, ECq, *on met les deux* AEq, EHq, *qui ſont en même raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables* AHE, CGE, *ou ſi à la place de ces deux* AEq, EHq, *on met les deux* ADq, HKq, *qui ſont en même raiſon, à cauſe des paralleles* AH, DK, *on aura cette derniere analogie*, FEG, *ou* ADE, BEC : ADq, HKq. *Ce qu'il faloit demontrer. D'où il ſuit que la raiſon du Quarré* HK, *au Rectangle* BEC, *eſt égale à celle de la ligne* AD, *à la ligne* DE.

Nous avons découvert tous ces Theoremes par l'analyſe, & on en peut trouver de la même façon une infinité d'autres, comme nous enſeignerons dans nôtre Traité de l'invention des Theoremes, *qui ſera ſuivy d'un autre Traité* de l'invention des Demonſtrations.

QUESTION III.

2. & 4. 2. Dioph. Probleme plan. Trouver deux Nombres, tels que les raiſons de leur difference à la difference & à la ſomme de leurs Quarrez ſoient données.

Pour reſoudre cette Queſtion par Geometrie, nous la propoſerons plus generalement en cette ſorte ; Trouver deux lignes telles que les raiſons du Rectangle ſous leur difference & une ligne donnée, à la difference & à la ſomme de leurs Quarrez ſoient données.

3. Fig. *On propoſe de trouver deux lignes* HC ∽ x, *&* HI ∽ y, *en ſorte que le Rectangle* lx-ly, *ſous leur difference* x-y, *& la ligne donnée* AO ∽ l, *ſoit à la difference de leurs Quarrez* xx-yy, *comme* AP ∽ r, *à* AQ ∽ ſ, *& que le même Rectangle* lx-ly, *ſoit à la ſomme*

des

des mêmes Quarrez xx†yy, *comme* AR ∽ a, *à* AS ∽ b. 3. Fig.

Selon les conditions de la Queſtion, on aura ces deux analogies.

lx-ly, xx-yy :: r, ſ,
lx-ly, xx†yy :: a, b.

Dans la premiere on trouvera y ∽ $\frac{lſ}{r}$-x, *qui eſt un Lieu à la Ligne droite, & dans la deuxiéme on trouvera* yy†$\frac{lby}{a}$ ∽ $\frac{lbx}{a}$-xx, *qui eſt un Lieu à un Cercle donné, lequel étant joint avec le Lieu à la Ligne droite, donne la conſtruction ſuivante.*

Ayant fait le triangle iſoſcele rectangle DCE, *dont chacun des côtez* CD, CE, *ſoit* $\frac{lſ}{r}$, *ou quatriéme proportionnel aux trois Lignes* AP, AQ, AO; *& le triangle iſoſcele rectangle* ABC, *dont chacun des côtez* AB, BC, *ſoit* $\frac{lb}{2a}$, *ou quatriéme proportionnel aux trois Lignes* 2AR, AS, AO, *décrivez du centre* A, *par le point* C, *une circonference de Cercle, qui coupe icy la Ligne droite Locale* DE, *au point* I, *duquel vous tirerez à la Ligne* DC, *la perpendiculaire* IH, *& les deux Lignes* HC, HI, *ſeront celles qu'on cherche, de ſorte que le rectangle* AOHC-AOHI, *ſera à la difference de leurs Quarrez* HCq-HIq, *comme* AP, *à* AQ, *& le même rectangle* AOHC-AOHI, *ſera à la ſomme de leurs Quarrez* HCq†HIq, *comme* AR, *à* AS. Conſtruction.

La premiere partie a été démontrée dans la Queſt. II. *du Traité precedent, & auſſi dans* la Queſt. I. *de ce Traité. La ſeconde partie ſe démontrera dans la* Queſtion V. Demonſtration.

Pour reſoudre cette Queſtion en nombres, on trouvera dans la premiere analogie, y ∽ $\frac{lſ}{r}$-x, *& dans la ſeconde on trouvera le même* y ∽ R. $\frac{llbb}{4aa}$†$\frac{lbx}{a}$-xx-$\frac{lb}{2a}$. *C'eſt*

3. Fig. *pourquoy on aura cette Equation*, R. $\frac{llbb}{4aa} + \frac{lbx}{a} - xx - \frac{lb}{2a} \sim \frac{lf}{r} - x$, *dans laquelle on trouvera* $x \sim \frac{lb}{2a} + \frac{lf}{2r} - R. \frac{llbb}{4aa} - \frac{llff}{4rr}$, *& les deux nombres qu'on cherche, seront tels,*

$$\frac{afr + brR.bbrr - aafl, afbr + rR.lbrr\ aafl}{2ar}$$

en negligeant la lettre l, *qui doit icy être prise pour l'unité, laquelle n'apporte aucun changement en multipliant, ou en divisant.*

Si $r \sim 1$, $f \sim 6$, $a \sim 1$, *&* $b \sim 10$, *les deux nombres seront* 2, 4.

QUESTION IV.

1. & 4. 2. Dioph. Probleme plan. Trouver deux Nombres, tels que les raisons de leur somme & de leur difference, à la somme de leurs Quarrez soient données.

Pour resoudre cette Question par Geometrie, nous la proposerons plus generalement en cette sorte; Trouver deux lignes telles que les raisons du Rectangle sous leur somme & une ligne donnée, & du Rectangle sous leur difference & la même ligne donnée, à la somme de leurs Quarrez, soient données.

4. Fig. *On propose de trouver deux lignes* HC ~ x, *&* HI ~ y, *en sorte que le Rectangle* lx+ly, *sous leur somme* x+y, *& la ligne donnée* AO ~ l, *soit à la somme* xx+yy *de leurs Quarrez, comme* AP ~ r, *à* AQ ~ f, *& que le Rectangle* lx-ly, *sous leur difference* x-y, *& la même Ligne donnée* AQ ~ l, *soit à la même somme de leurs Quarrez* xx+yy, *comme* AR ~ a, *à* AS ~ b.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx + ly, xx + yy :: r, f.$$

lx-ly, xx + yy :: a, b.

4. Fig.

Dans la premiere on trouvera $yy-\frac{lfy}{r} \sim \frac{lfx}{r}-xx$, *qui est un Lieu à un Cercle donné, & dans la seconde on trouvera* $yy+\frac{iby}{a} \sim \frac{lbx}{a}-xx$, *qui est un Lieu à un autre Cercle donné, lequel étant joint avec le premier, donne cette construction.*

Construction.

Ayant fait le triangle rectangle isoscele VTC, *dont chacun des côtez* TV, TC, *soit* $\frac{lo}{2a}$, *ou quatriéme proportionnel aux trois Lignes* 2AR, AS, AO; *& le triangle isoscele rectangle* ABC, *dont chacun des côtez* BA, BC, *soit* $\frac{lf}{2r}$, *ou quatriéme proportionnel aux trois Lignes* 2AP, AQ, AO, *décrivez des centres* V, A, *par le même point* C, *deux circonferences de Cercle, qui se coupent icy au point* I, *par lequel vous tirerez à la Ligne* CT *prolongée, la perpendiculaire* HI, *& les deux Lignes* HC, HI, *seront celles qu'on cherche; c'est à-dire que le Rectangle* AOHC + AOHI, *sera au Rectangle* HCq + HIq, *comme* AP, *à* AQ, *& le Rectangle* AOHC-AOHI, *sera au même Rectangle* HCq + HIq, *comme* AR, *à* AS.

Demonstration.

La premiere partie a été démontrée dans la Quest. III. *du Traité precedent, & la deuxiéme se démontrera dans la Question suivante.*

Si vous voulez resoudre cette Question en nombres, vous trouverez dans la premiere analogie, $y \sim \frac{lf}{rr} + R.\frac{llff}{4rr} + \frac{lfx}{r} - xx$, *& dans la seconde vous trouverez le même* $y \sim R.\frac{llbb}{4aa} + \frac{lbx}{a} - xx - \frac{lb}{2a}$. *C'est pourquoy on aura cette Equation,* $\frac{lf}{rr} + R.\frac{llff}{4rr} + \frac{lfx}{r} - xx \sim R.\frac{llbb}{4aa} + \frac{lbx}{a} - xx - \frac{lb}{r}$ *dans laquelle on trouvera* $x \sim \frac{bbrs+abll}{aall+bbrr}$, *en negligeant l'unité* 1, *& les deux nombres qu'on cherche, seront tels,*

$$\frac{bbrs+abll,\ bbrs-abll.}{aall+bbrr}$$

Si $r \sim 3$, $s \sim 10$, $a \sim 1$, *&* $b \sim 10$, *les deux nombres seront* 4, 2.

QUESTION V.

14. 1. & 4. 2 Dioph. Probleme solide.

Trouver deux Nombres, tels que les raisons de leur difference à la somme de leurs Quarrez, & de leur somme à leur produit, soient données.

Pour resoudre cette Question par Geometrie, nous la proposerons plus generalement en cette sorte; Trouver deux lignes, telles que les raisons du Rectangle sous leur difference & une Ligne donnée, à la somme de leurs Quarrez : & du Rectangle sous leur somme & la même Ligne donnée, à leur Rectangle, soient données.

8. Fig. *On propose de trouver deux Lignes* CH ∽ x *&* HI ∽ y, *en sorte que le rectangle* lx-ly, *sous leur difference* x-y, *& la Ligne donnée* AO ∽ l, *soit à la somme de leurs Quarrez* xx + yy, *comme* AP ∽ r, *à* AQ ∽ f; *& que le rectangle* lx + ly *sous leur somme* x + y, *& la même Ligne donnée* AO ∽ l, *soit à leur Rectangle* xy, *comme* AR ∽ a, *à* AS ∽ b.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies

$$lx-ly, xx+yy :: r, f.$$
$$lx+ly, xy :: a, b.$$

Dans la premiere, on trouvera $yy + \frac{lfy}{r} \backsim \frac{lfx}{r} - xx$, *qui est un Lieu à un Cercle donné, & dans la seconde on trouvera* $\frac{lbx}{a} \backsim xy - \frac{lly}{a}$, *qui est un Lieu à l'Hyperbole entre ses asymptotes, lequel étant joint avec le Lieu au Cercle, donne cette construction.*

Construction. *Ayant fait le triangle isoscele rectangle* ABC, *dont chacun des côtez* AB, BC, *soit* $\frac{f}{ll}$, *ou quatriéme pro-*

portionnel aux trois lignes 2AP, AQ, AO, *faites la* 5. Fig.
Ligne CD ∽ $\frac{lb}{a}$, *ou quatriéme proportionnelle aux trois Lignes* AR, AS, AO, *& tirez par le point* D, *à la Ligne* CD, *la perpendiculaire indefinie* DL, *sur laquelle vous prendrez la Ligne* DE ∽ CD, *& vous tirerez par le point* E, *à la Ligne* BC, *la parallele indefinie* EK. *Faites* EF ∽ DE, *& par le point* F, *tirez la Ligne* FG *égale & perpendiculaire à la Ligne* EF. *Enfin décrivez du centre* A, *par le point* C, *une circonference de Cercle, & du centre* E, *par le point* G, *entre les asymptotes* EK, EL, *l'Hyperbole* MGN, *qui coupe icy la circonference du Cercle aux deux poins* I, *par lesquels on tirera sur la Ligne* CB, *les deux perpendiculaires* IH, *& chacune de ces deux Lignes* HI, *avec sa Ligne correspondante* CH, *representeront les deux nombres qu'on cherche: de sorte que le Rectangle* AOCH-AOHI, *sera au Plan* CHq † HIq, *comme* AP, *à* AQ, *& le Rectangle* AOCH † AOHI, *sera au Plan* CHI, *comme* AR, *à* AS.

Pour démontrer la premiere partie, prolongez les Lignes CH, HI, *jusqu'à la circonference du Cercle, en* L, *& en* X, *& tirez par le point* C, *à la Ligne* IX, *la parallele* CY, *& par le point* Y, *où elle coupe la circonference du Cercle, & par le centre* A, *tirez les Lignes* CL, TV, *paralleles à la Ligne* CL. Demonst. tration.

Cette preparation étant faite, on considerera que la Ligne HX, *est égale à la somme des deux* HI, CL. *Car si des deux Lignes égales* VI, VX, *on ôte les deux égales* TC, TY, *ou* VH, VZ, *il restera* HI ∽ XZ, *& à cause de* XZ ∽ HX-HZ, *on aura* HI ∽ HX-HZ, *& à cause de* HZ ∽ 2AB ∽ 2BC ∽ CL, *on aura* HI ∽

3. Eg. HX-CL, *& par conſequent* HX ∽ HI † CL, *Ce qu'il faloit démontrer.*

C'eſt pourquoy on pourra faire cette analogie, LH, HX :: LH, HI † CL, *& ſi à la place des deux premiers termes* LH, HX, *on met les deux* HI, CH, *qui ſont en même raiſon, par la nature du Cercle, on aura celle-cy*, HI, CH : LH, HI † CL, *& par conſequent* HIq † CLHI ∽ CHLH *ou* HIq † CLHI ∽ CLCH-CHq, *à cauſe de* LH ∽ CL-CH, *& par l'antitheze, on aura* CLCH-CLHI ∽ CHq † HIq, *ou* 2ABCH-2ABHI ∽ CHq † HIq, *à cauſe de* CL ∽ 2AB, *& donnant à chaque plan la hauteur commune* AP, *on aura* 2ABAPCH-2ABAPHI ∽ APCHq † APHIq, *& ſi à la place de* 2ABAP, *on met* AOAQ, *qui luy eſt égal, à cauſe des quatre proportionnelles* 2AP, AQ, AO, AB, *par la conſtruction, on aura cette derniere Equation*, AOAQCH-AOAQHI ∽ APCHq † APHIq, *& par conſequent cette analogie*, AOCH-AOHI, CHq † HIq :: AP, AQ. *Ce qui eſt l'une des deux choſes qu'il faloit démontrer.*

Pour la demonſtration de la ſeconde partie, on conſiderera que par la proprieté de l'Hyperbole entre ſes aſymptotes, on a cette analogie, EK, EF :: FG, KI, *ou* EK, EF :: EF, KI : *C'eſt pourquoy en compoſant on aura celle-cy*, EK † EF, EF :: EF † KI, KI, *ou* CH, EF :: HI, KI, *& en permutant on aura celle-cy*, CH, HI :: EF, KI, *& en compoſant on aura celle-cy*, CH, CH † HI :: EF, EF † KI, *ou* CH, CH † HI :: EF, HI, *& par conſequent* CHI ∽ CHEF † HIEF. *C'eſt pourquoy on pourra faire cette analogie*, CHEF † HIEF, EFq :: CHI, EFq, *& à cauſe de la hauteur* EF, *qui eſt commune*

aux deux premiers termes on aura cette autre analogie, CH † HI, EF :: CHI, EFq, *& si on donne aux deux premiers termes, la hauteur commune* AO, *on aura celle-cy*, AOCH † AOHI, AOEF :: CHI, EFq, *& en permutant on aura celle-cy*, AOCH † AOHI, CHI :: AOEF, EFq, *& à cause de la hauteur* EF, *qui est commune aux deux derniers termes, on aura celle-cy*, AOCH † AOHI, CHI :: AO, EF, *& si à la place des deux derniers termes* AO, EF, *ou* AO, CO, *on met les deux* AR, AS, *qui sont en même raison, à cause des quatre proportionnelles* AR, AS, AO, AQ, *on aura cette derniere analogie*, AOCH † AOHI, CHI :: AR, AS. *Ce qui restoit à démontrer.* 1. Fig.

Si vous voulez resoudre cette Question en nombres, dans la premiere analogie, vous trouverez y ∽ R. $\frac{llff}{4rr} + \frac{lfx}{r} - xx - \frac{lf}{2r}$ *& dans la seconde vous trouverez le même* y ∽ $\frac{lbx}{ax-b}$. *C'est pourquoy vous aurez cette Equation*, R. $\frac{llff}{4rr} + \frac{lfx}{r} - xx - \frac{lf}{2r} \backsim \frac{lbx}{ax-lb}$, *ou* $x^3 - \frac{lfxx}{r} \frac{2lbxx}{a} + \frac{2llbbf}{aa} + \frac{llbfx}{ar} \backsim \frac{2l\,bbf}{2ar}$ *ou* $x^3 - \frac{18xx}{3} + \frac{192x}{9} \backsim \frac{310}{9}$ *si* r ∽ 1, f ∽ 6, a ∽ 1, *&* b ∽ 2, *& en supposant toûjours* l ∽ 1, *& dans cette derniere Equation vous trouverez* x ∽ 4, *& aussi* x ∽ $\frac{1}{3}$ R89 † $\frac{13}{3}$, *& au lieu de* y ∽ $\frac{lbx}{ax-lb}$, *ou de* y ∽ $\frac{4x}{3x-4}$ *on aura* y ∽ 2, *& aussi* y ∽ $\frac{2}{3}$ R89 - $\frac{14}{3}$. *Ainsi les deux nombres qu'on cherche seront* 4 & 2, *& aussi* $\frac{R89 + 13}{3}$ & $\frac{-R89 + 14}{3}$, *parceque cette Question a deux solutions, comme vous avez vû dans la construction Geometrique.*

QUESTION VI.

Probleme solide.

Trouver un Triangle isoscele, dont le contour & l'aire sont donnez.

6. Fig.

On propose de trouver un triangle isoscele ACB, *dont le contour soit égal à la Ligne donnée* AE, *& dont l'aire soit égale au Quarré de la Ligne donnée* AF.

Supposant que la Question soit déja resoluë, c'est à-dire que le triangle ACB *soit déja trouvé, tirez de son sommet* C, *sur la base* AB, *la perpendiculaire* CD, *qui divisera cette base* AB *en deux également au point* D. *Aprés cela supposez*

AE ∽ 2*a*.
AF ∽ *b*.
CD ∽ *x*.

pour avoir AD, *ou* BD ∽ $\frac{bb}{x}$ *à cause de* ADC ∽ AFq, *par la supposition, & par consequent* AB ∽ $\frac{2bb}{x}$ *&* AC *ou* BC ∽ R. $xx + \frac{b4}{xx}$; *& parceque le contour doit être égal à la Ligne donnée* AE ∽ 2a, *on aura cette Equation,* $\frac{2bb}{x} + 2\text{R. } xx + \frac{b4}{xx} \backsim 2a$, *ou* $x^3 - aax + 2abb \backsim 0$, *qu'il sera facile de reduire en deux Lieux, & de les joindre ensemble par les preceptes du* Probl. V. *ou bien on pourra trouver immediatement deux Lieux, en faisant cette autre analyse, c'est à-dire en supposant*

AE ∽ 2*a*.
AB ∽ *b*.
CD ∽ *x*.
AD ∽ *y* ∽ BD.

Parce que l'aire du triangle ACB, *doit étre égale au Quarré* bb, *de la Ligne* AE ∽ b, *on aura cette Equation,*

tion, xy ∽ bb, *qui eſt un Lieu à l'Hyperbole entre ſes aſymptotes, & dans le triangle rectangle* ADC, *ou* BDC, *on aura* AC *ou* BC ∽ R. xx † yy, *& le contour du triangle* ACB, *ſera* 2R. xx † yy † 2y. *C'eſt pourquoy on aura cette Equation*, 2R. xx † yy † 2y ∽ 2a, *ou* aa-2ay ∽ xx, *qui eſt un Lieu à une Parabole donnée, dont le Parametre eſt* 2a, *ou* AE. *Ce Lieu étant joint avec le precedent, donne la conſtruction ſuivante.* 6. Eg.

Ayant fait AG ∽ ½AE, *décrivez ſur l'axe* GE, *par le point* G, *la Parabole* HGI, *dont le Parametre ſoit égal à la Ligne donnée* AE. *Tirez par le point* A, *à la même Ligne donnée* AE, *la perpendiculaire indefinie* AL, *pour y prendre la Ligne* AN *égale à l'autre Ligne donnée* AF, *& pour tirer du point* N, *à la Ligne* AL, *la perpendiculaire* NO ∽ AN. *Enfin décrivez du centre* A, *par le point* O, *entre les aſymptotes* AE, AL, *l'Hyperbole* POQ, *qui coupe icy la Parabole* HGI, *aux deux poins* C, *deſquels on tirera ſur la Ligne* AE, *les deux perpendiculaires* CD, *& ayant fait* DB ∽ DA, *le triangle* ACB, *ſera celuy qu'on cherche, lequel ſe trouve icy double, de ſorte que ſon contour ſera égal à la Ligne donnée* AE, *& ſon aire ſera égale au Quarré de la Ligne donnée* AF. Conſtruction.

Car il eſt déja bien évident par la proprieté des aſymptotes, que l'aire du triangle ACB, *ou le Rectangle* ADC, *eſt égale au Quarré de la Ligne donnée* AF, *ou au Rectangle* ANO. *Il ne reſte donc plus qu'à démontrer que le contour du même triangle* ACB, *eſt égal à la Ligne donnée* AE, *ou au Parametre de la Parabole* HGI. Demonſtration.

Pour cette fin on conſiderera que par la nature de la Parabole, on a cette Equation, AEGD ∽ CDq, &

6. Fig. *à cauſe de* GD ∽ AG-AD ∽ $\frac{1}{4}$AE-AD, *& de* CDq ∽ ACq-ADq, *on aura* $\frac{1}{4}$AEq-AEAD ∽ ACq-ADq, *& par l'antitheſe on aura* $\frac{1}{4}$ AEq - AEAD † ADq ∽ ACq, *& par* 4. 2. *on aura* $\frac{1}{2}$AE - AD ∽ AC, *ou* $\frac{1}{2}$AE ∽ AC † AD, *& par conſequent* AE ∽ 2AC † 2AD ∽ AC † BC † AB. *Ce qu'il faloit démontrer.*

Determination. *Pour faire une determination touchant les deux Lignes données* AE, AF, *afin que la Queſtion propoſée ſoit toûjours poſſible, ſuppoſons que les deux Lignes Locales* HCI, PCQ, *ſe touchent au point* C, *auquel cas on n'aura qu'un Triangle* ACB, *& le côté* CB *touchera l'Hyperbole* PCQ *en ce point* C, *par la proprieté des aſymptotes, à cauſe des deux Lignes égales* AD, DB. *C'eſt pourquoy il touchera auſſi la Parabole* HGI, *au même point* C, *& par la proprieté de la touchante de la Parabole, les Lignes* GB, GD, *ſeront égales, ce qui fait que la Ligne* BD, *ou* AD, *ſera double de la Ligne* GD, *& par conſequent la Ligne* AG *triple de la même Ligne* GD; *& à cauſe de* AG ∽ $\frac{1}{2}$ a, *on aura* GD ∽ $\frac{1}{6}$ a, *& par conſequent* CD ∽ R$\frac{aa}{3}$, *par la nature de la Parabole, &* AD ∽ $\frac{1}{3}$ a. *Et parce que le Rectangle* ANO, *ou* bb *eſt égal au Rectangle* ADC, *ou* $\frac{1}{3}$ aR$\frac{aa}{3}$, *par la proprieté des aſymptotes, on aura cette Equation* $\frac{1}{3}$ aR$\frac{aa}{3}$ ∽ bb, *ou* 16a⁴ ∽ 432b⁴, *& conſequent* 2a ∽ bRR432, *& reduiſant cette Equation en proportion, on aura cette analogie,* 2a, b; *ou* AE, AF :: RR432, 1, *qui fait connoître que donnant* 1 *à la ligne* AF, *la ligne* AE *doit valoir* RR432, *lorſque les deux Lignes Locales ſe touchent. D'où il eſt aiſé de conclure qu'afin qu'elles puiſſent ſe couper, pour avoir deux triangles iſoſceles de même aire & de même con-*

7. Fig.

tour, en donnant 1 à la ligne AF, *on doit donner à la ligne* AE, *un peu plus que* RR432, *comme par exemple*, 5, *mais non pas* $4\frac{1}{2}$. 7. Fig.

SCOLIE.

Ainſi vous voyez qu'on peut trouver deux triangles iſoſceles de même aire & de même contour, mais non pas davantage, parceque les deux Lignes Locales ne ſe peuvent couper qu'en deux poins.

Si vous voulez trouver en nombres deux ſemblables triangles, comme ABC, EFG, *en ſorte que les perpendiculaires* BD, FG, *& toutes les autres lignes ſoient exprimées par des nombres rationnels, formez de* a *&* b, *ce triangle Rectangle*, 2ab, aa-bb, aa + bb, *& ſuppoſez* 8. & 9. Fig.

AD ∽ 2ab ∽ CD.
AC ∽ 4ab.
BD ∽ aa-bb.
AB ∽ aa + bb ∽ BC.

Pareillement formez de c *&* d, *ce triangle rectangle*, 2cd, cc-dd, cc + dd. *& ſuppoſez*

EH ∽ 2cd ∽ GH.
EG ∽ 4cd.
FH ∽ cc-dd.
EF ∽ cc + dd ∽ FG.

Le contour du triangle ABC *ſera* 2aa + 4ab + 2bb, *& ſon aire ſera* $2a^3b-2ab^3$. *Le contour du triangle* EFG, *ſera* 2cc + 4cd + 2dd, *& ſon aire ſera* $2c^3d-2cd^3$.

Comme ces deux contours doivent être égaux entre-eux, & ces deux aires pareillement égales entre-elles, leurs moitiez ſeront auſſi egales, & l'on aura ces deux Equations.

8. & 9. Fig.

$$aa + 2ab + bb \sim cc + 2cd + dd.$$
$$a^3b - ab^3 \sim c^3d - cd^3.$$

Dans la premiere on trouvera $a + b \sim c + d$, *& ſi l'on ſuppoſe* $a + b \sim m$, *on aura* $m \sim c + d$, *& conſequemment* $b \sim m - a$, *&* $d \sim m - c$, *& la deuxiéme Equation ſe changera en celle cy*, $3aamm - am^3 - 2a^3m \sim 3ccmm - cm^3 - 2c^3m$, *ou* $3aam - amm - 2a^3 \sim 3ccm - cmm - 2c^3$, *ou* $cmm - amm + 3aam - 3ccm \sim 2a^3 - 2c^3$, *laquelle étant diviſée par* $c - a$, *on aura cette autre Equation*, $mm - 3am - 3cm \sim -2aa - 2ac - 2cc$, *dans laquelle on trouvera* $m \sim \frac{3a+3c}{2} + \frac{1}{2}$ R. $aa + 10ac + cc$. *Ainſi on aura cette Puiſſance à égaler au Quarré*, $aa + 10ac + cc$, *pour le côté duquel prenant* $a + \frac{fc}{n}$ *on trouvera*

$a \sim ff - nn.$
$c \sim 10nn - 2ff.$
$m \sim ff + 2fn + 13nn.$
$b \sim 2fn + 14nn.$
$d \sim -ff + 4fn + 3nn.$

& les lignes des deux triangles qu'on cherche, ſeront de cette grandeur,

ABC
- $AD \sim 4f^5n + 28ffnn - 4fn^3 - 28n^4 \sim CD \sim 12.$
- $AC \sim 8f^5n + 56ffnn - 8fn^3 - 56n^4 \sim 24.$
- $AB \sim f^4 + 56fn^3 + 2ffnn + 197n^4 \sim BC \sim 37.$
- $BD \sim f^4 - 56fn^3 - 6ffnn - 195n^4 \sim 35.$

EFG
- $EH \sim 60n^4 + 68fn^3 + 4ffnn - 4f^3n \sim GH \sim 20.$
- $EG \sim 120n^4 + 136fn^3 + 8ffnn - 8f^3n \sim 40.$
- $EF \sim 109n^4 - 16fn^3 + 26ffnn + 8f^3n + f^4 \sim FG \sim 29.$
- $FH \sim 91n^4 - 64fn^3 - 18ffnn - 8f^3n - f^4 \sim 21.$

Si l'on ſuppoſe $f \sim 2$, *&* $n \sim 1$, *ou* $f \sim 1$, *&* $n \sim 2$, *les lignes des deux triangles qu'on cherche, ſeront telles que vous les voyez icy marquées à la droite.*

Si vous voulez une autre ſolution indefinie, ſuppoſez 8. & 9. Fig.

$$ABC\begin{cases} AD \backsim 2a\text{-}bb \backsim CD. \\ AC \backsim 2aa\text{-}2bb. \\ BD \backsim 2ab. \\ AB \backsim aa + bb \backsim BC. \end{cases}$$

$$EFG\begin{cases} EH \backsim cc\text{-}dd \backsim GH. \\ EG \backsim 2cc\text{-}2dd. \\ FH \backsim 2cd. \\ EF \backsim cc + dd \backsim FG. \end{cases}$$

Le contour du triangle ABC *ſera* 4aa, *& ſon aire ſera* $2a^3b\text{-}2ab^3$. *Le contour du triangle* EFG *ſera* 4cc, *& ſon aire ſera* $2c^3d\text{-}2cd^3$. *Et comme les deux contours doivent être égaux, auſſi-bien que les aires, leurs moitiez ſeront égales, & l'on aura ces deux Equations,*

$$2aa \backsim 2cc.$$
$$a^3b\text{-}ab^3 \backsim c^3d\text{-}cd^3.$$

Dans la premiere, on trouvera $a \backsim c$, *& la deuxiéme ſe changera en celle-cy,* $c^3b\text{-}cb^3 \backsim c^3d\text{-}cd^3$, *dans laquelle on trouvera* $c \backsim R.bb + bd + dd$, *& l'on aura cette Puiſſance à égaler au Quarré,* $bb + bd + dd$, *pour le côté duquel prenant* $\frac{md}{n}\text{-}b$, *on trouvera*

$$b \backsim mm\text{-}nn.$$
$$d \backsim nn + 2mn.$$
$$c \backsim mm + mn + nn \backsim a.$$

& les lignes des deux triangles qu'on cherche, ſeront telles,

$$ABC\begin{cases} AD \backsim 2m^3n + 5mmnn + 2mn^3 \backsim CD \backsim 20. \\ AC \backsim 4m^3n + 10mmnn + 4mn^3 \backsim 40. \\ AB \backsim 2m^4 + 2m^3n + mmnn + 2mn^3 + 2n^4 \backsim BC \backsim 29. \\ BD \backsim 2m^4 + 2m^3n - 2mn^3 - 2n^4 \backsim 21. \end{cases}$$

8. & 9. Fig. EFG
$$\begin{cases} EH \sim m^4 + 2m^3n - mmnn - 2mn^3 \sim GH \sim 12. \\ EG \sim 2m^4 + 4m^3n - 2mmnn - 4mn^3 \sim 24. \\ EF \sim m^4 + 2m\,n + 7mmnn + 6mn^3 + 2n^4 \sim FG \sim 37. \\ FH \sim 4m^3n + 6mmnn + 6mn^3 + 2n^4 \sim 35. \end{cases}$$

Si l'on suppose m ∽ 2, *&* n ∽ 1, *ou* m ∽ 1, *&* n ∽ 2, *les lignes des deux triangles qu'on cherche seront de telle grandeur que vous les voyez marquées à la droite.*

PROBLEME I.

D'un Lieu à la Ligne droite, & d'un Lieu à la Parabole, tirer deux Lieux au Cercle.

Lieux donnez $\left\{\begin{array}{l} x+y \backsim b. \text{ Lieu à la Ligne droite.} \\ xx \backsim ay. \text{ Lieu à la Parabole.} \end{array}\right.$

$y \backsim b-x$. *Lieu changé*
$yy \backsim bb-2bx+xx$.
$-2ay \backsim -2xx$
$yy-2ay \backsim bb-2bx-xx$. *Lieu au Cercle.*
$x \backsim b-y$. *Lieu changé.*
$xx \backsim bb-2by+yy$.
$-2xx \backsim -2ay$.
$-xx \backsim bb-2by-2ay+yy$. *Lieu au Cercle.*

PRopoſons ce Lieu à la Ligne droite, $x+y \backsim b$, & ce Lieu à la Parabole, $xx \backsim ay$. Pour en tirer deux Lieux au Cercle, changez le Lieu à la Ligne droite $x+y \backsim b$, en celuy-cy, $y \backsim b-x$, & ôtez de ſon Quarré $yy \backsim bb-2bx+xx$ le double du Lieu à la Parabole, $2xx \backsim 2ay$, & il viendra ce premier Lieu:

au Cercle, $yy - ay \backsim bb - bx - xx$, dont le Rayon eſt R. $aa + 2bb$, comme l'on connoîtra en ôtant les ſeconds termes.

Ou bien changez le Lieu à la Ligne droite, $x + y \backsim b$, en celuy-cy, $x \backsim b - y$, & ôtez de ſon Quarré $xx \backsim bb - 2by + yy$, le double du Lieu à la Parabole, $2xx \backsim 2yy$, pour avoir ce ſecond Lieu au Cercle, $-xx \backsim bb - 2by - 2ay + yy$, dont le Rayon eſt R. $aa + 2ab$.

Par le moyen de ce Probleme, on reduira aiſément une Equation de deux dimenſions en trois Lieux, dont l'un ſoit *à la Ligne droite*, & les deux autres *au Cercle*, parce qu'on la peut reduire ſans peine en deux Lieux, dont l'un ſoit *à la Ligne droite*, & l'autre *à la Parabole*, comme vous allez voir dans le Probleme ſuivant.

PROBLEME II.

Reduire une Equation de deux dimenſions en quatre Lieux, dont l'un ſoit à la Ligne droite, *l'autre* à la Parabole, *& les deux autres* au Cercle.

Toutes les Equations poſſibles de deux dimenſions, ſe peuvent reduire à l'une des trois ſuivantes.

$$xx + ax \backsim ab.$$
$$xx - ax \backsim ab.$$
$$xx - ax \backsim -ab.$$

Premiere Equation. Pour reduire la premiere Equation, $xx + ax \backsim ab$, ſuppoſez ce Lieu à la Parabole, $xx \backsim ay$, & mettant ay à la place de xx, l'Equation propoſée $xx + ax \backsim ab$, ſe changera en celle-cy, $ay + ax \backsim ab$, ou $y + x \backsim b$, qui eſt un Lieu à la Ligne droite, par le moyen

moyen duquel & de celuy à la Parabole, $xx \backsim ay$, on trouvera deux Lieux au Cercle, comme nous avons enſeigné au Probleme precedent, ce que nous repeterons encore icy. Premiere Equation.

Ayant changé le Lieu à la Ligne droite $y \dagger x \backsim b$, en celuy-cy, $y \backsim b-x$, ôtez de ſon Quarré $yy \backsim bb-2bx \dagger xx$ le double du Lieu à la Parabole, $2xx \backsim 2ay$, pour avoir ce premier Lieu au Cercle, $yy-2ay \backsim bb-2bx-xx$, dont le Rayon eſt R. $aa \dagger 2bb$.

Ou bien ayant changé le Lieu à la Ligne droite, $y \dagger x \backsim b$, en celuy-cy, $x \backsim b-y$, ôtez de ſon Quarré $xx \backsim bb-2by \dagger yy$, le double du Lieu à la Parabole, $2xx \backsim 2ay$, pour avoir cet autre Lieu au Cercle, $-xx \backsim bb-2by-2ay \dagger yy$, dont le Rayon eſt R. $aa \dagger 2ab$. Ainſi la premiere Equation, $xx \dagger ax \backsim ab$, ſe trouve reduite en ces quatre Lieux.

$x \dagger y \backsim b$. *A la Ligne droite.*
$xx \backsim ay$. *A la Parabole.*
$yy-2ay \backsim bb-2bx-xx$. *Au Cercle.*
$yy-2ay-2by \backsim -bb-xx$. *Au Cercle.*

C'eſt de la même façon que la deuxiéme Equation, $xx-ax \backsim ab$, ſe reduira en ces quatre Lieux. Seconde Equation.

$-x \dagger y \backsim b$. *A la Ligne droite.*
$xx \backsim ay$. *A la Parabole.*
$yy-2ay \backsim bb \dagger 2bx-xx$. *Au Cercle.*
$yy-2ay-2by \backsim -bb-xx$. *Au Cercle.*

C'eſt auſſi de la même façon que la troiſiéme Equation $xx-ax \backsim -ab$, ſe reduira en ces quatre Lieux. Troiſiéme Equation.

$-x \dagger y \backsim -b$. *A la Ligne droite.*
$xx \quad ay$. *A la Parabole.*

Troiſiéme Equation.

$yy - 2ay \backsim bb - 2bx - xx$. *Au Cercle.*

$yy - 2ay + 2by \backsim - bb - xx$. *Au Cercle.*

Abregé de la Regle precedente.

On tire de cette Regle generale l'abregé ſuivant, pour reduire une Equation de deux dimenſions en quatre Lieux, dont l'un ſoit *à la Ligne droite*, l'autre *à la Parabole*, & les deux autres *au Cercle.*

$xx + ax \backsim ab$. *Equation propoſée.*

$xx \backsim ay$ *Lieu ſuppoſé à la Parabole.*

$x + y \backsim b$. *Lieu ſuppoſé à la Ligne droite.*

$y \backsim b - x$ *Lieu changé.*

$yy \backsim bb - 2bx + xx$.

$-2ay \backsim -2xx$.

$yy - 2ay \backsim bb - 2bx - xx$. *Lieu au Cercle.*

$x \backsim b\ y$ *Lieu changé.*

$xx \backsim bb - 2by + yy$.

$-2xx \backsim -2ay$.

$-xx \backsim bb - 2by - 2ay + yy$. *Lieu au Cercle.*

Pour reduire par exemple la premiere Equation, $xx + ax \backsim ab$, ſuppoſez ce Lieu à la Parabole, $xx \backsim ay$, & ce Lieu à la Ligne droite $x + y \backsim b$, en donnant toûjours + à la quantité y, & aux quantitez b, x, les mêmes Signes qu'elles ont dans l'Equation propoſée. Si vous changez le Lieu à la Ligne droite, $x + y \backsim b$, en ces deux $y \backsim b - x$, $x \backsim b - y$, & que de leurs Quarrez $yy \backsim bb - 2bx + xx$, $xx \backsim bb - 2by + yy$, vous en ôtiez le double du Lieu à la Parabole, $2xx \backsim 2ay$, il reſtera ces deux Lieux au Cercle, $yy - 2ay \backsim bb - 2bx - xx$, $yy - 2ay\ 2by \backsim -bb - xx$.

Si vous voulez que le Lieu au Cercle ſoit donné, de ſorte que ſon Rayon ſoit par exemple égal à la quantité donnée d, choiſiſſez une quantité indeter-

minée, comme r, & ſuppoſez $x \backsim \frac{zz}{r}$, afin que l'Equation propoſée $xx + ax \backsim ab$, ſe change en celle-cy, $zz + rz \backsim \frac{brr}{a}$, qu'on reduira par l'abregé precedent, en ces quatre Lieux. Abregé de la Regle precedente.

$y + z \backsim \frac{br}{a}$. *A la Ligne droite.*

$zz \backsim ry$. *A la Parabole.*

$yy - 2ry \backsim \frac{bbrr}{aa} - \frac{2brz}{a} - zz$. *Au Cercle.*

$yy - 2ry - \frac{2brr}{a} \backsim -bb - zz$. *Au Cercle.*

Et ſi on veut que le premier Cercle ſoit donné, on égalera ſon Rayon $R.rr + \frac{2bbrr}{aa}$ au Rayon donné d, pour avoir $r \backsim R\frac{aadd}{aa + 2bb}$. Pareillement ſi l'on veut que le ſecond Cercle ſoit donné, on égalera ſon Rayon, $R.rr + \frac{2brr}{a}$, au Rayon donné d, pour avoir $r \backsim R\frac{aa}{aa+bb}$.

Il ne reſte plus qu'à vous enſeigner le moyen de joindre enſemble deux de ces Lieux, pour pouvoir connoître en lignes les Racines d'une Equation de deux dimenſions, ſçavoir le Lieu à la Ligne droite avec l'un des deux au Cercle, ou les deux au Cercle enſemble, ſans toucher au Lieu à la Parabole, qui ne doit ſervir que pour les Equations plus élevées.

PROBLEME III.

Trouver par Geometrie les Racines d'une Equation de deux dimenſions. Premiere Methode.

Toutes les Equations poſſibles de deux dimenſions, ſe peuvent reduire à l'une des trois ſuivantes.

$xx + ax \backsim ab$.

$xx - ax \backsim ab$.

$xx - ax \backsim -ab$.

Pour trouver les Racines de la premiere Equation, Premiere Equation.

Premiere Equation. $xx + ax \backsim ab$, dont les trois Lieux convenables ont été trouvez tels, au Probleme precedent,

$x + y \backsim b$. *A la Ligne droite.*

$yy - 2ay \backsim bb - 2bx - xx$. *Au Cercle.*

$yy - 2ay - 2by \backsim -bb - xx$. *Au Cercle.*

& premierement en joignant le Lieu à la Ligne droite $x + y \backsim b$, avec le premier Lieu au Cercle $yy - 2ay \backsim bb - 2bx - xx$, dont le Rayon eſt R. $aa + 2bb$, tirez les deux Lignes perpendiculaires AB, AC, égales chacune à la quantité donnée b, & menez par le point C, du côté de B, la Ligne CE parallele à AB, & égale à l'autre quantité donnée a. Prolongez la Ligne CA en D, en ſorte que la Ligne CD ſoit égale à l'hypotenuſe BC, du triangle iſoſcele rectangle ABC, & décrivez du centre E par le point D, une circonference de Cercle, qui ſe trouve icy coupée par la Ligne Locale FBG, perpendiculaire à l'hypotenuſe BC; aux deux poins F, G, d'où l'on tirera ſur la Ligne AB, prolongée les perpendiculaires FH, GI, dont la moindre FH ſera la Racine veritable, & la plus grande GI ſera la Racine fauſſe de l'Equation propoſée $xx + ax \backsim ab$.

20. Fig.

Demonſtration. Car à cauſe de AB $\backsim b \backsim$ AC, on aura BC, ou CD $\backsim$ R$2bb$. Et à cauſe de CE $\backsim a$, on aura ED, ou EF $\backsim$ R. $aa + 2bb$. Parce que l'angle ABC eſt demidroit, & que l'angle FBC eſt droit, l'angle ABF ſera auſſi demidroit, auſſi-bien que l'angle HFB, & ſi on ſuppoſe FH $\backsim x$, on aura auſſi HB $\backsim x$, & par conſequent AH, ou CK $\backsim b - x$, laquelle étant ôtée de CE $\backsim a$, on aura KE $\backsim a - b + x$, & dans le triangle rectangle FKE, on trouvera cette Equation, $aa - 2ab$

$\dagger bb \dagger 2xx \backsim aa \dagger 2ab$, ou $xx \dagger ax \backsim ab$, qui est la même que la proposée. D'où il suit que la Ligne FH est la Racine veritable de l'Equation proposée $xx \dagger xx \backsim ab$. Ce qui est l'une des deux choses qu'il faloit démontrer. 10. Fig.

La même Equation $xx \dagger ax \backsim ab$, viendra aussi en supposant GI $\backsim -x$, car à cause de IN $\backsim b$, on aura GN $\backsim -x-b$, & à cause du Rayon ED, ou EG $\backsim$ R.$aa \dagger 2bb$, on aura EN $\backsim$ R.$aa \dagger bb - 2bx - xx$, à laquelle ajoûtant CE $\backsim a$, on aura CN, ou AI $\backsim$ R.$aa \dagger bb - 2bx - xx \dagger a$, d'où ôtant GI, ou BI $\backsim -x$, il restera AB, ou $b \backsim$ R.$aa \dagger bb - 2bx - xx \dagger a \dagger x$, ou $b - a - x \backsim$ R.$aa \dagger bb - 2bx - xx$, ou $bb - 2ab \dagger aa - 2bx \dagger 2ax \dagger xx \backsim aa \dagger bb - 2bx - xx$, ou $xx \dagger ax \backsim ab$, qui est la même chose que l'Equation proposée. D'où il suit que la Ligne GI est la Racine fausse de l'Equation proposée $xx \dagger ax \backsim ab$. Ce qui restoit à démontrer.

Pour trouver les Racines de la deuxiéme Equation $xx - ax \backsim ab$, dont les trois Lieux convenables ont été trouvez tels, par le Probleme precedent, Seconde Equation.

$-x \dagger y \backsim b$. *A la Ligne droite.*

$yy - 2ay \backsim bb \dagger 2bx - xx$. *Au Cercle.*

$yy - 2ay - 2by \backsim -bb - xx$. *Au Cercle.*

& premierement en joignant le Liéu à la Ligne droite $-x \dagger y \backsim b$, avec le premier Lieu au Cercle, $yy - 2ay \backsim bb \dagger 2bx - xx$, dont le Rayon est R.$aa \dagger 2bb$, comme auparavant, on fera une construction semblable à la precedente, & des deux Racines GI, FH, la plus grande GI sera la veritable, & la plus petite FH la fausse, & la demonstration s'en fera comme auparavant, sçavoir en supposant FH $\backsim -x$, ou GI

10. Fig. $\backsim x$, car il viendra l'Equation propoſée $xx - ax \backsim ab$.

Troiſiéme Equation. Pour trouver les Racines de la troiſiéme Equation, $xx - ax \backsim -ab$, dont les trois Lieux convenables ont été trouvez tels, par le Probleme precedent,

$-x \dagger y \backsim -b$. *A la Ligne droite.*

$yy - 2ay \backsim bb - 2bx - xx$. *Au Cercle.*

$yy - 2ay \dagger 2by \backsim -bb - xx$. *Au Cercle.*

& premierement en joignant le Lieu à la Ligne droite $-x \dagger y \backsim -b$, avec le premier Lieu au Cercle, $yy - 2ay \backsim bb - 2bx - xx$, dont le Rayon eſt le même qu'auparavant, ſçavoir R. $aa \dagger 2bb$; on fera une conſtruc-

11. Fig. tion ſemblable à la precedente, excepté que la Ligne CE $\backsim a$, doit être miſe de l'autre côté vers L, & alors les deux perpendiculaires FH, GI, ſeront les Racines veritables de l'Equation propoſée $xx - ax \backsim -ab$, & la demonſtration s'en fera comme auparavant, ſi l'on ſuppoſe FH $\backsim x$, & GI $\backsim x$.

Determination. Ces deux Racines veritables FH, GI, ont icy beſoin de determination, laquelle ſe fera en cette ſorte. Si $a \backsim 4b$, c'eſt à-dire ſi la Ligne CE eſt quadruple de la Ligne AB, les deux Racines FH, GI, ſeront égales, parce que dans cette ſuppoſition la Ligne Locale BG, ne fera que toucher la circonference du Cercle Local LGM, comme il eſt aiſé à démontrer: c'eſt pourquoy quand la Ligne AB ſera plus grande que le quart de la Ligne CE, les deux Lignes Locales ne ſe rencontreront point, & les deux Racines FH, GI, ſeront imaginaires. Ainſi vous voyez qu'afin que les deux Racines de l'Equation propoſée $xx - ax \backsim -ab$, ſoient réelles il ne faut pas que $\frac{1}{4} a$ ſoit moindre que b.

SCOLIE.

10. & 11. Fig.

Bien-que cette Methode ſoit un peu plus longue que la commune, pour les Equations d'une forme ſemblable à celle que nous avons propoſée, elle a neanmoins de l'avantage pour les Equations de cette forme.

$$xx + ax \backsim \text{R.} \frac{aabb + a4.}{1}$$
$$xx - ax \backsim \text{R.} \frac{aabb - a4.}{1}$$
$$xx - ax \backsim -\text{R.} \frac{aabb - a4.}{1}$$

Car le Rayon du premier Lieu au Cercle ſera exprimé par la ſeule Lettre b, & la conſtruction ſera ſi l'on veut, la même qu'auparavant, excepté qu'on doit faire les Lignes AB, AC, égales chacune à $\text{R.} \frac{bb\ aa}{1}$, pour avoir BC, ou CD $\backsim$ R.$bb - aa$, & par conſequent le Rayon ED $\backsim b$. Ou bien on peut commencer par le Cercle, dont le Rayon eſt b, & prendre ſur le Diametre LM, la Ligne EC $\backsim a$, depuis le centre E vers L, pour les deux premieres Equations, & vers M, pour la troiſiéme Equation, pour tirer du point C, à la Ligne LM, la perpendiculaire CD, que l'on conſiderera comme la diagonale d'un Quarré, dont le côté donnera la Ligne AC $\backsim$ AB, &c. 10. & 11. Fig.

PROBLEME IV.

Trouver par Geometrie les Racines d'une Equation de deux dimenſions. Seconde Methode.

Nous avons déja dit, que les Equations poſſibles de deux dimenſions ſe peuvent reduire à l'une de ces trois,

12. & 13. Fig.

$$xx + ax \backsim ab.$$
$$xx - ax \backsim ab.$$
$$xx - ax \backsim -ab.$$

que nous resoudrons icy en joignant le Lieu à la Ligne droite avec le second Lieu au Cercle.

Premiere Equation. Pour trouver les Racines de la premiere Equation, $xx + ax \backsim ab$, en joignant ces deux Lieux,

$$x + y \backsim b. \text{ A la Ligne droite.}$$
$$yy - 2ay - 2by \backsim -bb - xx. \text{ Au Cercle.}$$

12. Fig. Tirez la Ligne AB égale à la quantité connuë a, & la prolongez en C, en sorte que la Ligne BC soit égale à l'autre quantité connuë b, & décrivez à l'entour de la Ligne AC, le demicercle ADC, pour y inscrire la droite CD $\backsim$ CB, & pour décrire du centre A, par le point D, une circonference de Cercle, qui se trouve icy coupée par la Ligne Locale EF, qui fait en B, avec BC un angle demidroit, aux deux poins E, F, desquels on tirera sur la Ligne AC, prolongée, les perpendiculaires EH, FG, qui seront les deux Racines de l'Equation proposée $xx + ax \backsim ab$, la plus petite EH étant la Racine veritable, & la plus grande FG, la fausse.

Demonstration. Car si l'on suppose EH $\backsim x$, on aura aussi BH $\backsim x$, à cause de l'angle B demidroit, & par consequent AH $\backsim a + x$, à cause de AB $\backsim a$: & à cause de BC $\backsim b \backsim$ CD, on aura AC $\backsim a + b$, & par consequent AD, ou AE $\backsim$ R.$aa + 2ab$, & dans le triangle rectangle AHE, on trouvera cette Equation $aa + 2ax + 2xx \backsim aa + 2ab$, ou $xx + ax \backsim ab$, qui est la même que la proposée. D'où il suit que la Ligne EH en est la Racine veritable. Ce qui est l'une des deux choses qu'il faloit démontrer. Pareillement

Pareillement si l'on suppose FG ∽ $-x$, on aura aussi GB ∽ $-x$, & par consequent AG ∽ $-x-a$, & dans le Triangle rectangle AGF, on trouvera cette Equation, $aa+2ax+2xx \backsim aa+2ab$, ou $xx+ax \backsim ab$, qui est la même que la proposée. D'où il suit que la Ligne FG en est la Racine fausse. Ce qui restoit à démontrer. 11. Fig.

Pour trouver les Racines de la seconde Equation, $xx-ax \backsim ab$, en joignant ensemble ces deux Lieux. Deuxiéme Equation.

$-x+y \backsim b$. *A la Ligne droite.*

$yy-2ay-2by \backsim -bb-xx$. *Au Cercle.*

On fera une construction semblable à la precedente, & des deux Racines FG, EH, la plus grande FG sera la veritable, & la plus petite EH la fausse, & la demonstration s'en fera de la même façon ; si l'on suppose FG ∽ x, & EH ∽ $-x$.

Pour trouver les Racines de la troisiéme Equation, $xx-ax \backsim -ab$, par le moyen de ces deux Lieux. Troisiéme Equation.

$-x+y \backsim -b$. *A la Ligne droite.*

$yy-2ay+2by \backsim -bb-xx$. *Au Cercle.*

On fera une construction semblable à la precedente, excepté qu'on doit ôter de la Ligne AB ∽ a, la Ligne BC ∽ x, & les perpendiculaires EH, FG, seront les deux Racines veritables de l'Equation proposée $xx-ax \backsim -ab$, & la demonstration s'en fera comme auparavant, si l'on suppose FG ∽ x, & EH ∽ x. 13. Fig.

SCOLIE.

Bien-que cette Methode soit un peu plus longue que la commune, pour les Equations d'une forme semblable à celle que nous avons proposée, elle a

23. Fig. pourtant quelque avantage pour les Equations de cette forme.

$$xx + ax \backsim \tfrac{1}{2}bb - \tfrac{1}{2}aa.$$
$$xx - ax \backsim \tfrac{1}{2}bb - \tfrac{1}{2}aa.$$
$$xx - ax \backsim \tfrac{1}{2}bb - \tfrac{1}{2}aa.$$

dont la troiſiéme ſuppoſe b moindre que a, pour la differencier de la ſeconde, qui ſuppoſe b plus grand que a. Car le Rayon du ſecond Lieu au Cercle ſera exprimé par la ſeule Lettre b, & la conſtruction ſera, ſi l'on veut, la même qu'auparavant, excepté qu'on doit faire BC $\backsim \frac{aa-bb}{2a} \backsim$ CD. Ou bien on peut commencer par le Cercle Local, dont le Rayon eſt b, & prendre ſur le Diametre IK, depuis le centre A, vers K la Ligne AB $\backsim a$ pour faire en B un angle demidroit ABF, par la Ligne Locale BF, &c. Or comme cette conſtruction eſt la plus ſimple de toutes celles que l'on peut inventer par les Lieux, nous en traiterons plus au long dans *le Probl. IX.* où nous la demontrerons à fonds, & dans *le Probl VIII.* nous en découvrirons l'origine par un chemin beaucoup plus court, ſans nous amuſer à pluſieurs autres que l'on peut trouver à l'imitation du precedent & du ſuivant, comme nous ferons voir dans nôtre grand Traité d'Algebre, lorſqu'il aura le bonheur de paroître.

PROBLEME VI.

Troiſiéme Methode. *Trouver par Geometrie les Racines d'une Equation de deux dimenſions.*

Nous reſoudrons encore autrement ce Probleme, en joignant enſemble les deux Lieux au Cercle, qui

ont êté trouvez au *Probl. II.* pour les trois Equations ſuivantes.

$$xx + ax \backsim ab.$$
$$xx - ax \backsim ab.$$
$$xx - ax \backsim -ab.$$

Pour trouver les Racines de la premiere Equation, $xx + ax \backsim ab$, en joignant enſemble ſes deux Lieux au Cercle. Premiere Equation.

$$yy - 2ay \backsim bb - 2bx - xx.$$
$$yy - 2ay - 2by \backsim -bb - xx.$$

Décrivez du centre A, une circonference de Cercle, dont le Rayon AB, ou AC, ſoit égal à R.$aa + 2ab$, & du même centre A, tirez au Diametre BC, la perpendiculaire AD $\backsim b$, & par le point D, au même Diametre BC, la parallele DI $\backsim$ AD $\backsim b$, pour décrire du centre I, à l'intervale de R.$aa + 2bb$, une circonference de Cercle, qui coupe icy la premiere décrite du centre A, aux deux poins E, F, d'où l'on tirera au Diametre BC, les perpendiculaires EH, FG, qui ſeront les Racines de l'Equation propoſée, $xx + ax \backsim ab$, dont la plus petite EH ſera la Racine veritable, & la plus grande FG la fauſſe. 14. Fig.

Car ſi on ſuppoſe EH $\backsim x$, on aura EK $\backsim x + b$, à cauſe de KH $\backsim b \backsim$ AD, & à cauſe de AE $\backsim$ R.$aa + 2ab$, on aura AH, ou DK $\backsim$ R.$aa + 2ab - xx$, de laquelle ôtant DI $\backsim b$, il reſtera IK $\backsim$ R.$aa + 2ab - xx - b$, & enfin à cauſe de IE $\backsim$ R.$aa + 2bb$, on trouvera dans le Triangle rectangle IKE, cette Equation, $aa + 2ab + 2bb \backsim + 2bx - 2b$R.$aa + 2ab - xx \backsim aa + 2bb$, ou $xx + ax \backsim ab$, qui eſt la même que la propoſée. D'où il ſuit que EH en eſt la Racine veritable; Ce qui eſt Demonſtration.

14. Fig. l'une des deux choſes qu'il faloit démontrer.

Pareillement ſi on ſuppoſe FG ∽ $-x$, on aura FL ∽ $-x-b$, AG ou DL ∽ R.$aa+2ab-xx$, à cauſe de AF ∽ R.$aa+2ab$, & à cauſe de DI ∽ b, on aura LI ∽ R.$aa+2ab-xx+b$, & enfin à cauſe de IF ∽ R.$aa+2bb$, on trouvera dans le Triangle rectangle FLI, cette Equation, $aa+2bx+2bb+2ab+2b$R.$aa+2ab-xx \backsim aa+2bb$, ou $xx+ax \backsim ab$ qui eſt la même que la propoſée. D'où il ſuit que FG en eſt la Racine fauſſe ; Ce qui reſtoit à démontrer.

Deuxiéme Equation. Pour trouver les Racines de la ſeconde Equation, $xx-ax \backsim ab$, en joignant enſemble ſes deux Lieux au Cercle,

$$yy-2ay \backsim bb+2bx-xx.$$
$$yy-2ay-2by \backsim -bb-xx.$$

on fera une conſtruction ſemblable à la precedente, & des deux Racines EH, FG, la plus grande FG ſera la Racine veritable, & EH la fauſſe, & la demonſtration s'en fera comme auparavant, ſi l'on ſuppoſe FG ∽ x, & EH ∽ $-x$.

Troiſiéme Equation. Pour trouver les Racines de la troiſiéme Equation, $xx-ax \backsim -ab$, en joignant enſemble ſes deux Lieux au Cercle,

$$yy-2ay \backsim bb-2bx-xx.$$
$$yy-2ay+2by \backsim -bb-xx.$$

15. Fig. On fera une conſtruction ſemblable à la precedente, excepté qu'on doit faire le Rayon AB, ou AC égal à R.$aa-2ab$, & que la Ligne DI ∽ b, doit être miſe de l'autre côté depuis D vers B, & les perpendiculaires EH, FG, repreſenteront les deux Racines veritables de l'Equation propoſée $xx-ax \backsim -ab$, & la

demonſtration s'en fera comme auparavant, ſi l'on ſuppoſe EH ∽ x, & FG ∽ x. 11. Fig.

SCOLIE.

Comme nous avons reduit une Equation de deux dimenſions en un Lieu *à la Ligne droite*, & en un Lieu *à la Parabole*, pour en tirer deux Lieux *au Cercle*, qui nous ont donné les conſtructions precedentes; on peut auſſi la reduire en un Lieu à la *Ligne droite* & en un Lieu à *l'Hyperbole par ſon Parametre*, pour en tirer deux Lieux au *Cercle*, ou bien en un Lieu *à la Ligne droite* & en un Lieu *à l'Ellipſe*, pour en tirer pareillement deux Lieux *au Cercle*, qui nous donneront d'autres conſtructions, telles que nous les avons dans nôtre grand Traité d'Algebre. Mais on n'en aura point de plus ſimple, que celle qui ſe tire en reduiſant l'Equation propoſée en un Lieu *à la Ligne droite*, & en un Lieu *à l'Hyperbole entre ſes aſymptotes*, pour en tirer un Lieu tres-ſimple *au Cercle*. C'eſt pourquoy nous finirons les Equations de deux dimenſions par cette derniere Methode, qui ſera precedée de quelques Lemmes, qui ſerviront pour ſa demonſtration.

Mais auparavant que de venir à la pratique, nous enſeignerons icy en peu de mots l'uſage du Lieu *à l'Hyperbole par ſon Parametre*, & du Lieu *à l'Ellipſe*, pour reduire une Equation de deux dimenſions en un Lieu *à la Ligne droite*, & en deux Lieux *au Cercle*.

Propoſons cette Equation de deux dimenſions, $xx + ax \backsim ab$. Reduiſez-la en celle-cy, $xx + \frac{aadx}{cc-ff} \backsim$

$\frac{mmd+aad}{c-d}$, en sorte qu'on ait $c \backsim 3d$, & $ab \backsim \frac{mmd+aad}{c-d}$, ou $ab \backsim \div mm + aa$. & par consequent $mm \backsim 2ab - aa$. Ayant donc reduit l'Equation proposée $xx + ax \backsim ab$, en celle-cy, $xx + \frac{ax}{c-d} \backsim \frac{mmd+aad}{c-d}$, multipliez-la par $c-d$, pour avoir en entiers cette autre Equation, $cxx - dxx + 2adx \backsim mmd + aad$, que vous diviserez par d, pour avoir cette autre Equation $\frac{cxx}{d} - xx + 2ax \backsim mm + aa$, ou $aa - 2ax + xx \backsim \frac{cxx}{d} - mm$, dont la premiere partie $aa - 2ax + xx$, à sa Racine quarrée $a - x$, que nous appellerons y, pour avoir ce Lieu à la Ligne droite, $a - x \backsim y$. Si donc on met y à la place de $a-x$, & yy à la place $aa - 2ax + xx$, l'Equation precedente $aa - 2ax + xx \backsim \frac{cxx}{d} - mm$, se changera en celle-cy, $yy \backsim \frac{cxx}{d} - mm$, qui est un Lieu à l'Hyperbole par son Parametre, par le moyen duquel & de celuy à la Ligne droite $a - x \backsim y$, on trouvera deux Lieux au Cercle, en cette sorte.

Ayant changé le Lieu à la Ligne droite $a - x \backsim y$, en celuy-cy, $x \backsim a - y$, ôtez son Quarré $xx \backsim aa - 2ay + yy$, du Lieu à l'Hyperbole $\frac{cxx}{d} - mm \backsim yy$, ou $3xx - 2ab + aa \backsim yy$, à cause de $c \backsim 3d$, & de $mm \backsim 2ab - aa$, le reste $2xx - 2ab + aa \backsim 2ay - aa$, ou $xx \backsim ab - aa + ay$, sera un Lieu à la Parabole, par le moyen duquel & de celuy à la Ligne droite, on trouvera par *Probl. I.* deux Lieux au Cercle, sçavoir

$$yy - 2ay \backsim 2ab - aa - 2ax - xx.$$

$$yy - 4ay \backsim 2ab - 3aa - xx.$$

C'est de la même façon que l'on reduira cette autre Equation de deux dimensions, $xx - ax \backsim ab$, en ces trois Lieux.

$a + x \backsim y$. *A la Ligne droite*;

$yy - 2ay \backsim 2ab - aa + 2ax - xx$. *Au Cercle.*

$yy - 4ay \backsim 2ab - 3aa - xx$. *Au Cercle.*

C'eſt encore de la même façon que cette autre Equation de deux dimenſions, $xx - ax \backsim -ab$, ſe reduira en ces trois Lieux,

$a + x \backsim y$. *A la Ligne droite.*

$yy - 2ay \backsim -2ab - aa + 2ax - xx$. *Au Cercle.*

$yy - 4ay \backsim -2ab - 3aa - xx$ *Au Cercle.*

Propoſons encore la même Equation, $xx + ax \backsim ab$. Reduiſez-la en celle-cy, $xx + \frac{2adx}{c+d} \backsim \frac{mmd - aad}{c+d}$, en ſorte qu'on ait $c \backsim d$, & $mm \backsim aa + 2ab$, & achevant le reſte comme auparavant, on trouvera ces trois Lieux,

$a + x \backsim y$ *A la Ligne droite.*

$yy \backsim 2ab + aa - xx$. *Au Cercle.*

$yy + 2ay \backsim 3aa + 2ab + 2ax - xx$. *Au Cercle.*

C'eſt de la même façon que cette autre Equation de deux dimenſions $xx - ax \backsim ab$, ſe reduira en ces trois Lieux,

$a - x \backsim y$. *A la Ligne droite.*

$yy \backsim 2ab + aa - xx$. *Au Cercle.*

$yy + 2ay \backsim 3aa + 2ab - 2ax - ax$. *Au Cercle.*

C'eſt auſſi de la même façon que cette autre Equation de deux dimenſions $xx - ax \backsim -ab$, ſe reduira en ces trois Lieux,

$x - a \backsim y$ *A la Ligne droite.*

$yy \backsim aa - 2ab - xx$ *Au Cercle.*

$yy - 2ay \backsim 3aa - 2ab - 2ax - xx$. *Au Cercle.*

En joignant enſemble deux de ces Lieux, on aura d'autres conſtructions, dont nous ne parlerons pas icy, & il ſuffit de vous avoir ouvert le chemin pour

en trouver une infinité d'autres, qui ne ſeront jamais plus ſimples que celle du *Probl IX.* laquelle par conſequent nous expliquerons plus au long, comme vous allez voir dans les Lemmes ſuivans.

LEMME I.

Si les deux côtez d'un Triangle rectangle ſont égaux, le double de leur Rectangle ſera égal au Quarré de l'Hypotenuſe.

16. Fig. Je dis que ſi les deux côtez AD, DC, du Triangle Rectangle ADC ſont égaux, le double de leur Rectangle, ſçavoir 2ADC, eſt égal au Quarré de l'Hypotenuſe AC.

Demonſtration. Car puiſqu'on a $AD_q + CD_q \backsim AC_q$, par 47. 1. Si à la place de CD_q on met ſon égal AD_q, on aura $AD_q + AD_q$, ou $2AD_q$, ou $2ADC \backsim AC_q$. Ce qu'il faloit démontrer.

LEMME II.

Les deux côtez d'un Triangle Rectangle ſont égaux, lorſque le double de leur Rectangle eſt égal au Quarré de l'Hypotenuſe.

17. Fig. Je dis que ſi le double Rectangle ſous les côtez AD, DC, eſt égal au Quarré de l'Hypotenuſe AC, du Triangle Rectangle ADC, ces deux mêmes côtez AD, DC, ſont égaux.

Demonſtration. Car ſi l'on veut que le côté CD, par exemple, ſoit plus grand que le côté AD, que l'on en retranche $DK \backsim AD$, & qu'on mene la droite AK. Puiſque

que par l'hypoteſe nous avons 2ADC ⌙ ACq, & que par 12. 2. nous avons AKq † CKq † 2CKD ⌙ ACq, nous aurons 2ADC ⌙ AKq † CKq † 2CKD, & à cauſe de DK ⌙ AD, par la conſtruction, & de AKq ⌙ 2ADK, par le Lemme precedent, nous aurons 2ADq ⌙ 2ADK † CKq † 2CKD. Ce qui eſt impoſſible. 17. Fig.

Ou bien à cauſe de 2ADC ⌙ ACq, on aura par 47. 1. 2ADC ⌙ ADq † DCq, & ajoûtant 2ADC, on aura 4ADC ⌙ ADq † DCq † 2ADC, & parce que, par 4. 2. ADq † DCq † 2ADC, eſt le Quarré de la ſomme AD † DC des côtez AD, DC, on pourra faire cette analogie, 2AD, AD † DC :: AD † DC, 2DC : c'eſt pourquoy en diviſant on aura celle-cy, 2AD, AD - DC :: AD † DC, AD - DC, & par conſquent 2AD ⌙ AD † DC, ou AD ⌙ DC. Ce qu'il faloit démontrer.

LEMME III.

Si la droite CE *coupe à angles demidroits le Diametre* HI *en* B, *& la circonference du Cercle, dont le centre eſt* A, *aux deux poins* C, E, *d'où l'on tire ſur le Diametre* HI, *les perpendiculaires* CD, EF, *la Ligne* AF *ſera égale à la Ligne* BD. 18. & 19. Fig.

Ayant mené les deux rayons AC, AE, on tirera des deux Triangles rectangles, AEF, ACD, cette Equation, AFq † EFq ⌙ ADq † CDq, ou AFq † BFq ⌙ ADq † BDq, & à cauſe de BFq ⌙ ABq † AFq † 2FAB, & de ADq ⌙ ABq † BDq † 2ABD, par 4. 2. on aura ABq † 2AFq † 2FAB ⌙ ABq † 2BDq † 2ABD, ou AFq † FAB ⌙ BDq † ABD, & ajoûtant $\frac{1}{4}$ ABq, on 18. Fig.

18. Fig. aura $AF^q + FAB + \frac{1}{4} AB^q \backsim BD^q + ABD + \frac{1}{4} AB^q$, & par 4. 2. on aura $AF + \frac{1}{2} AB \backsim BD + \frac{1}{2} AB$, & par conſequent $AF \backsim BD$. Ce qu'il faloit démontrer.

La demonſtration ſe fera de la même façon dans 19. Fig la *Fig* 19. pourvû qu'à la place de BD^q on mette $AB^q - 2AFB + AF^q$, & $AB^q - 2ABD + BD^q$ à la place de AD^q, &c.

COROLLAIRE I.

18. & 19 Fig. Il s'enſuit de ce Theoreme, que la Ligne AF eſt auſſi égale à la Ligne CD, à cauſe de $CD \backsim BD$, & que par conſequent les trois Lignes AF, BD, CD, ſont égales.

COROLLAIRE II.

Il s'enſuit auſſi que la Ligne EF, ou BF, eſt égale à la Ligne AD, & que par conſequent les trois Lignes EF, BF, AD, ſont égales. Car ſi dans *la* 18. *Fig.* on ajoûte aux deux Lignes égales AF, BD, la Ligne AB, ou dans la 19. *Fig.* la Ligne FD, on aura BF, ou $EF \backsim AD$.

COROLLAIRE III.

Il s'enſuit encore que la Ligne AB, dans *la* 18. *Fig.* eſt la difference des Lignes EF, CD, & la ſomme dans la 19. *Fig.* parce que dans la 18. *Fig* la Ligne AB eſt l'excez de la Ligne BF, ou EF, ſur la Ligne AF, ou BD, ou CD, & que dans la 19. *Fig.* elle eſt la ſomme des Lignes AD, ou EF, & BD, ou CD.

COROLLAIRE IV.

18. & 19. Fig.

Il s'enſuit encore que la moitié de la difference des Quarrez AB, AC, eſt égale au Rectangle des Lignes CD, EF. Car dans le Triangle ABC, de la 18. *Fig.* on a, par 13. 2. cette Equation, $AC_q - AB_q \backsim BC_q \dagger 2ABD$, & à cauſe de $BC_q \backsim 2BD_q$, par *Lem.* 1. on aura celle-cy, $AC_q - AB_q \backsim 2BD_q \dagger 2ABD$, & encore à cauſe de $BD_q \dagger ABD \backsim ADB$, par 3. 2. on aura $AC_q - AB_q \backsim 2ADB$, & par conſequent $\frac{AC_q - AB_q}{2} \backsim ADB \backsim CDEF$. Ce qu'il falloit démontrer.

Ou bien parce que l'on a par 3. 2. cette Equation, $BD_q \dagger ABD \backsim ADB$, on aura $2BD_q \dagger 2ABD \backsim 2ADB$, & ajoûtant AB_q, on aura $AB_q \dagger 2BD_q \dagger 2ABD \backsim 2ADB \dagger AB_q$, & à cauſe de $AD_q \backsim AB_q \dagger BD_q \dagger 2ABD$, par 4. 2. on aura $AD_q \dagger BD_q$, ou $AD_q \dagger CD_q$, ou $AC_q \backsim 2ADB \dagger AB_q$, & par l'antitheſe on aura $AC_q - AB_q \backsim 2ADB$, & par conſequent $\frac{AC_q - AB_q}{2} \backsim ADB \backsim CDEF$.

De même dans le triangle ABC de la 19. *Fig* on a, par 12. 2. cette Equation, $AB_q - AC_q \backsim 2ABD - BC_q$, & à cauſe de $BC_q \backsim 2BD_q$, par *Lem* 1. on aura $AB_q - AC_q \backsim 2ABD - 2BD_q$, & encore à cauſe de $AB - BD \backsim AD$, on aura $AB_q - AC_q \backsim 2ADB$, & par conſequent $\frac{AB_q - AC_q}{2} \backsim ADB \backsim CDEF$.

Ou bien dans le Triangle rectangle ACD, on a cette Equation, $AD_q \dagger CD_q \backsim AC_q$, par 47. 1. ou $AD_q \dagger BD_q \backsim AC_q$, & ajoûtant 2ADB, on aura $AD_q \dagger BD_q \dagger 2ADB \backsim AC_q \dagger 2ADB$, ou $AB_q \backsim AC_q \dagger 2ADB$, & conſequemment $\frac{AB_q - AC_q}{2} \backsim ADB \backsim CDEF$.

18. & 19. Fig.

COROLLAIRE V.

Il s'enſuit de plus que dans la 18. *Fig.* le Quarré CD, plus le Rectangle ABCD, eſt égal à la moitié de la difference des Quarrez AB, AC; & que le Quarré EF, moins le Rectangle ABEF, eſt égal à la même moitié.

Car à cauſe de CD ∽ BD, & de AB ∽ EF, par *Coroll.* 2. on a CD † AB ∽ EF, & donnant la hauteur commune CD, on aura CD*q* † ABCD ∽ CDEF, & à cauſe de CDEF ∽ $\frac{ACq-ABq.}{2}$ par *Coroll* 4. on aura CD*q* † ABCD ∽ $\frac{ACq-ABq.}{2}$ ce qui eſt une des choſes qu'il faloit démontrer.

Pareillement on a EF-AB ∽ CD, & donnant la hauteur commune EF, on aura EF*q*-ABEF ∽ CDEF, & à cauſe de EFCD ∽ $\frac{ACq-ABq.}{2}$ on aura EF*q*-ABEF ∽ $\frac{ACq-ABq.}{2}$ ce qui reſtoit à démontrer.

COROLLAIRE VI.

Enfin il s'enſuit que dans la 19. *Fig.* que la difference du Quarré CD, & du Rectangle ABCD, eſt égale à la moitié de la difference des Quarrez AB, AC, & que la difference du Quarré EF, & du Rectangle ABEF eſt égale à la même moitié.

Car ſi à CD ∽ AB-EF, on donne la hauteur commune CD, on aura CD*q* ∽ ABCD-CDEF, & à cauſe de CDEF ∽ $\frac{ACq-ABq.}{2}$ par *Coroll.* 4. on aura CD*q* ∽ ABCD-$\frac{ACq+ABq.}{2}$ & par conſequent CD*q*-ABCD ∽ $\frac{ABq...ACq.}{2}$ ce qui eſt une des choſes qu'il faloit démontrer.

Pareillement ſi à EF ∽ AB-CD, on donne la hau-

teur commune EF, on aura $EFq \backsim ABEF - CDEF$, & à cauſe de $CDEF \backsim \frac{ABq - ACq}{4}$ par *Coroll.* 4. on aura $EFq \backsim ABEF - \frac{ABq + ACq}{4}$ & par conſequent $ABEF - EFq \backsim \frac{ABq - ACq}{4}$ Ce qui reſtoit à démontrer. 18. & 19. Fig.

PROBLEME VII.

D'un Lieu à la Ligne droite & d'un Lieu à l'Hyperbole entre ſes aſymptotes, tirer un Lieu au Cercle.

Propoſons ce Lieu à la Ligne droite, $x + y \backsim b$, & ce Lieu à l'Hyperbole entre ſes aſymptotes, $xy \backsim aa$. Pour en tirer un Lieu au Cercle, ôtez du Quarré $xx + 2xy + yy \backsim bb$, du Lieu à la Ligne droite $x + y \backsim b$, le double $2xy \backsim 2aa$, du Lieu à l'Hyperbole, $xy \backsim aa$, pour faire évanoüir le terme $2xy$, & vous aurez ce Lieu au Cercle, $xx + yy \backsim bb - 2aa$, dont le Rayon eſt R. $bb - 2aa$.

PROBLEME VIII.

Reduire une Equation de deux dimenſions en trois Lieux, dont l'un ſoit à la Ligne droite, l'autre à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, & le troiſieme au Cercle.

Toute Equation poſſible de deux dimenſions, ſe peut toûjours reduire à l'une des trois ſuivantes.

$$xx + ax \backsim ab.$$
$$xx - ax \backsim ab.$$
$$xx - ax \backsim -ab.$$

Suppoſez premierement ce Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, $xy \backsim ab$, & mettant xy à la pla-

ce de ab, la premiere Equation, $xx + ax \backsim ab$, ſe changera en celle-cy, $xx + ax \backsim xy$. ou $x + a \backsim y$, ou $y - x \backsim a$, qui eſt un Lieu à la Ligne droite, par le moyen duquel & de celuy à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, on trouvera, par le Probleme precedent, un Lieu au Cercle, ſçavoir en ajoûtant au Quarré $yy - 2xy + xx \backsim aa$, du Lieu à la Ligne droite, $y - x \backsim a$, le double $2y \backsim 2aa$, du Lieu $xy \backsim aa$ à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, pour faire évanoüir le terme $2xy$, le reſte $xx + yy \backsim aa + 2ab$ ſera un Lieu au Cercle, dont le Rayon eſt R. $aa + 2ab$. Ainſi la premiere Equation $xx + ax \backsim ab$, ſe trouve reduite en ces trois Lieux.

Premiere Equation.

$y - x \backsim a$ *A la Ligne droite.*
$xy \backsim ab$. *A l'Hyperbole.*
$xx + yy \backsim aa + 2ab$. *Au Cercle.*

C'eſt de la même façon que la deuxiéme Equation, $xx - ax \backsim ab$, ſe reduira en ces trois Lieux.

Deuxiéme Equation.

$x - y \backsim a$. *A la Ligne droite.*
$xy \backsim ab$. *A l'Hyperbole.*
$xx + yy \backsim aa + 2ab$. *Au Cercle.*

C'eſt encore de la même façon que la troiſiéme Equation $xx - ax \backsim -ab$, ſe reduira en ces trois Lieux.

Troiſiéme Equation.

$x + y \backsim a$. *A la Ligne droite.*
$xy \backsim ab$. *A l'Hyperbole.*
$xx + yy \backsim aa - 2ab$. *Au Cercle.*

Nous avons tiré de cette Regle generale, l'abregé ſuivant, pour reduire en trois ſemblables Lieux une Equation de deux dimenſions, lorſqu'elle eſt ſemblable à l'une des trois ſuivantes.

$$2x + ax \backsim \frac{bb-aa}{2}$$
$$xx - ax \backsim \frac{bb-aa}{2}$$
$$xx - ax \backsim \frac{bb-aa}{2}$$

où l'on doit ſuppoſer b plus grand que a, dans les deux premieres, & b moindre que a dans la derniere.

Pour reduire la premiere Equation, $xx + ax \backsim \frac{bb-aa}{2}$ en trois Lieux, dont l'un ſoit à la Ligne droite, l'autre à l'Hyperbole entre ſes aſymptotes, & le troiſiéme au Cercle; multipliez-la par 2, pour faire évanoüir la fraction, & vous aurez cette autre Equation, $2xx + 2ax \backsim bb - aa$, de laquelle ôtant le Quarré xx, vous aurez cette autre Equation, $xx + 2ax \backsim bb - aa - xx$, à laquelle ajoûtant le Quarré aa, vous aurez cette autre Equation, $xx + 2ax + aa \backsim bb - xx$, dont la premiere partie $xx + 2ax + aa$ a ſa Racine quarrée $x + a$, que nous appellerons y, de ſorte qu'on aura ce Lieu à la Ligne droite, $x + a \backsim y$, & l'Equation precedente, $xx + 2ax + aa \backsim bb - xx$, ſe changera en celle-cy, $yy \backsim bb - xx$, qui eſt un Lieu au Cercle, dont le Rayon eſt b. Si vous multipliez le Lieu à la Ligne droite, $x + a \backsim y$ par x, vous aurez $xx + ax \backsim xy$, ou $\frac{bb-aa}{2} \backsim xy$, qui eſt un Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes; Ainſi l'Equation propoſée $xx + ax \backsim \frac{bb-aa}{2}$, ſe trouve reduite en ces trois Lieux.

$x + a \backsim y$. *A la Ligne droite.*
$bb - xx \backsim yy$. *Au Cercle.*
$\frac{bb-aa}{2} \backsim xy$, *A l'Hyperbole.*

Premiere Equation.

C'eſt de la même façon que la ſeconde Equation $xx - ax \backsim \frac{bb-aa}{2}$, ſe reduira en ces trois Lieux,

$x - a \backsim y$. *A la Ligne droite.*

Deuxiéme Equation.

$bb-xx \backsim yy$. *Au Cercle.*

$\frac{bb-aa}{a} \backsim xy$. *A l'Hyperbole.*

C'eſt encore de la même façon que la troiſiéme Equation, $xx-ax \backsim \frac{bb\ aa}{a}$, ſe reduira en ces trois Lieux,

Troiſiéme Equation.

$a-x \backsim y$. *A la Ligne droite.*

$bb-xx \backsim yy$. *Au Cercle.*

$-\frac{bb+aa}{a} \backsim xy$. *A l'Hyperbole.*

PROBLEME IX.

Quatriéme Methode.

Trouver par Geometrie les Racines d'une Equation de deux dimenſions.

Nous avons dit que les Equations poſſibles de deux dimenſions ſe peuvent reduire à l'une des trois ſuivantes,

$xx+ax \backsim \frac{bb-aa.}{a}$

$xx-ax \backsim \frac{bb-aa.}{a}$

$xx-ax \backsim \frac{bb-aa.}{a}$

& que pour les diſtinguer, on doit concevoir b plus grande que a, dans les deux premieres, & b moindre que a, dans la derniere.

Premiere Equation.

Pour trouver les Racines de la premiere Equation, $xx+ax \backsim \frac{bb\ aa.}{a}$ dont les deux Lieux convenables ſont

$x+a \backsim y$ *A la Ligne droite.*

$bb-xx \backsim yy$ *Au Cercle.*

rejettant le Lieu à l'Hyperbole, qui ne convient qu'aux Equations de trois ou de quatre dimenſions;

11. Fig.

Décrivez du centre A, à l'intervale de la quantité donnée b, une circonference de Cercle, & prenez ſur ſon Diametre HI, la Ligne AB égale à l'autre quantité

quantité donnée *a*. Tirez par le point B, à angles demidroits, la droite CE, & par les poins C, E, sur HI, les perpendiculaires CD, EF, qui seront les Racines de l'Equation proposée, $xx \dagger ax \backsim \frac{bb-aa}{1}$, dont la plus petite CD, sera la veritable, & la plus grande EF la fausse. 18. Fig.

Car leur difference est égale à la Ligne AB, ou au coëfficient *a*, par *Coroll.* 3. *Lem* 3. & leur Rectangle est égal à la moitié de la difference des Quarrez AB, AI, ou au dernier terme $\frac{bb\,aa}{1}$, par *Coroll.* 4. *Lem* 3. ce qui suffit pour la demonstration. Mais on connoît encore par *Coroll.* 5. *Lem.* 3. que ce même Rectangle est égal à CD*q* † ABCD, ou à EF*q* - ABEF. D'où il suit que la Ligne CD est la Racine veritable, & EF la fausse. Demonstration.

Pour trouver les Racines de la seconde Equation, $xx - ax \backsim \frac{bb-aa}{2}$ dont les Lieux convenables, sont Deuxiéme Equation.

x - a ∽ y. A la Ligne droite.

bb - xx ∽ yy. Au Cercle.

on fera une construction semblable à la precedente, mais des deux Racines CD, EF, la plus grande EF, sera la veritable, & la plus petite CD, la fausse, & la demonstration s'en fera comme auparavant.

Pour trouver les Racines de la troisiéme Equation, $xx - ax \backsim \frac{bb-aa}{2}$ dont les deux Lieux convenables sont Troisiéme Equation.

a - x ∽ y. A la Ligne droite.

bb - xx ∽ yy. Au Cercle.

on fera une construction semblable à la precedente, & l'on démontrera de la même façon que les Lignes CD, EF, sont les deux Racines veritables de l'Equation proposée, $xx - ax \backsim \frac{bb-aa}{2}$ Mais comme nous 19. Fig.

19. Fig avons icy a plus grand que b, le point B se rencontrera au dehors du Cercle, & il aura besoin de determination : car s'il étoit bien éloigné, la droite BE, pourroit ne pas rencontrer la circonference du Cercle, & alors les Racines CD, EF, seroient imaginaires. Or la plus grande distance que ce point B puisse avoir de la circonference du Cercle, est lorsque les deux Racines CD, EF, sont égales chacune à la moitié du Rayon AC, c'est à-dire lorsque la droite BE touche la circonference du Cercle, ce qui arrivera quand le Quarré AB sera double du Quarré AC, comme nous allons démontrer.

Determination.

Demonstration. Puisque par la supposition, nous avons $AB^q \backsim 2AC^q$, & que par 4. 2. nous avons $AB^q \backsim AD^q \dagger 2ADB \dagger BD^q$, ou $AB^q \backsim AD^q \dagger 2ADB \dagger CD^q$, ou $AB^q \backsim AC^q \dagger 2ADC$, nous aurons $AC^q \dagger 2ADC \backsim 2AC^q$, & par consequent $2ADC \backsim AC^q$, & par *Lem.* 2. nous aurons $AD \backsim CD$. C'est pourquoy l'angle CAD sera demidroit, & comme l'angle B, est aussi demidroit par la construction, il faut que l'angle ACB, soit droit, par 32. 1. & qu'ainsi la droite BC touche le Cercle. D'où il suit que quand le Quarré AB sera plus grand que le double du Quarré AC, la Ligne BC ne pourra pas rencontrer le Cercle, & qu'ainsi les Racines seront imaginaires.

Si vous voulez trouver les Racines d'une Equation de deux dimensions par la Methode commune, reduisez-la à l'une des trois suivantes, ce qui sera toûjours possible.

Cinquiéme Methode.

$$xx \dagger ax \backsim bb.$$
$$xx - ax \backsim bb.$$

$xx - ax \backsim - bb$.

Pour trouver les Racines de la premiere Equation, $xx + ax \backsim bb$, faites le Triangle rectangle ABC, dont la baſe AB, ſoit égale à la quantité donnée b, ou à la Racine quarrée de l'Homogene de comparaiſon, & la hauteur AC à la moitié du côté coëfficient a, & décrivez du centre C, par le point A, une circonference de Cercle, qui ſe trouve icy coupée par l'hypotenuſe BC, prolongée aux poins D, E, & les Lignes BD, BE, ſeront les Racines de l'Equation propoſée $xx + ax \backsim bb$, dont la plus petite BD, ſera la veritable, & la plus grande BE, la fauſſe. Premiere Equation. 20. Fig.

Car ſi l'on ſuppoſe BD $\backsim x$, on aura BE $\backsim x + a$, à cauſe de DE $\backsim a$, & parce que le Rectangle EBD eſt égal au Quarré de la touchante AB, par 36. 3. on aura cette Equation, $xx + ax \backsim bb$, qui eſt la même que la propoſée. Demonſtration.

On trouvera la même Equation en ſuppoſant BE $\backsim -x$; D'où il ſuit que BD eſt la Racine veritable, & BE la fauſſe, ce que l'on connoît encore, parce que leur difference DE eſt égale au coëfficient a, & que leur Rectangle EBD, ou le Quarré de la touchante AB, eſt égal à l'Homogene bb.

Pour trouver les Racines de la ſeconde Equation, $xx - ax \backsim bb$, on fera une conſtruction ſemblable à la precedente, mais des deux Racines BD, BE, la plus grande BE ſera la Racine veritable, & la plus petite BD, la fauſſe, & la demonſtration s'en fera comme auparavant. Deuxiéme Equation.

Pour trouver les Racines de la troiſiéme Equation, $xx - ax \backsim - bb$, on fera une conſtruction ſem- Troiſiéme Equation. 21. Fig.

11. Fig. blable à la precedente, excepté qu'au lieu de prolonger l'Hypotenuſe BC juſqu'à ce qu'elle coupe le Cercle, on doit tirer du point B, à la Ligne AC, la parallele BE, & alors les Lignes BD, BE ſeront les Racines veritables de l'Equation propoſée $xx - ax \backsim -bb$, & la demonſtration s'en fera comme auparavant.

Determination. Le point B, peut être tellement éloigné du point A, que la droite BE ne fera que toucher la circonference du Cercle, & alors les deux Racines ſeront égales : & ſi le point B, eſt encore plus éloigné, la Ligne BE ne rencontrera jamais le Cercle, & dans ce cas les deux Racines ſeront imaginaires. Ainſi le point B, a beſoin de determination, qui eſt que la Ligne AB, ou b, ne doit pas être plus grande que le Rayon du Cercle, ou que $\frac{1}{2}a$, & la demonſtration en eſt évidente.

PROBLEME X.

Reduire en Lieux une Equation de trois dimenſions, où le troiſiéme terme manque.

Propoſons cette Equation de trois dimenſions affectée ſous le côté, $x^3 + abx \backsim aac$. Commencez par ce Lieu le plus ſimple à la Parabole, $xx \backsim dy$, dont le parametre d eſt indeterminé, & ſubſtituant dy à la place de xx, l'Equation propoſée $x^3 + abx \backsim aac$, ſe changera en celle-cy, $dxy + abx \backsim aac$, ou $xy + \frac{abx}{d} \backsim \frac{aac}{d}$, qui eſt un Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes.

Pour avoir d'autres Lieux, multipliez l'Equation

proposée $x^3 + abx \backsim aac$ par x, & vous aurez cette autre Equation, $x^4 + abxx \backsim aacx$, qui se reduira en Lieux en cette sorte. Substituant comme auparavant, dy à la place de xx, & $ddyy$ à la place de x^4, l'Equation precedente, $x^4 + abxx \backsim aacx$, se changera en celle-cy, $ddyy + abdy \backsim aacx$, ou $yy + \frac{aby}{d} \backsim \frac{aacx}{dd}$, qui est un autre Lieu à la Parabole, lequel êtant ôté du premier $xx \backsim dy$, en ôtant $\frac{aacx}{dd}$ de xx, & $yy + \frac{aby}{d}$ de dy, on aura ce Lieu au Cercle, $xx - \frac{aacx}{dd} - \frac{aby}{d} \backsim dy - \frac{aby}{d} - yy$, & en ôtant $yy + \frac{aby}{d}$ de xx & $\frac{aacx}{dd}$ de dy, on aura ce Lieu à l'Hyperbole équilatere, $xx - yy - \frac{aby}{d} \backsim dy - \frac{aacx}{dd}$. Que si on ne change que x^4 en $ddyy$, on aura cette autre Equation, $ddyy + abxx \backsim aacx$, ou $yy \backsim \frac{aacx}{dd} - \frac{abxx}{dd}$ qui est un Lieu à l'Ellipse, car il est permis de changer seulement tel terme que l'on voudra, pourvû que dans le Lieu qu'on trouvera, la Lettre inconnuë n'ait pas plus de deux dimensions, autrement ce Lieu seroit inutile, comme êtant trop élevé.

Ainsi nous avons deux Lieux à la Parabole, deux à l'Hyperbole, un au Cercle, & un à l'Ellipse, & comparant diversement ces Lieux ensemble, on en trouvera d'autres, entre lesquels on choisira les plus simples, pour resoudre l'Equation; mais on ne trouvera jamais deux Lieux differens au Cercle, parce que l'Equation a trois dimensions, à moins qu'elle ne se puisse abaisser.

Comme le Parametre d, du Lieu supposé à la Parabole, $xx \backsim dy$, est indeterminé, on le doit prendre le plus commode qu'on pourra, pour avoir une solution plus simple, & il sera bon de supposer icy $d \backsim a$, & alors l'Equation proposée $x^3 + abx \backsim aao$,

ſe trouvera reduite en ces ſix Lieux ;

$xx \backsim ay$. *A la Parabole.*

$yy + by \backsim cx$. *A la Parabole.*

$xy + bx \backsim ac$. *A l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes.*

$xx - cx \backsim ay - by \cdot yy$. *Au Cercle.*

$xx + cx \backsim yy + ay + by$. *A l'Hyperbole Equilatere.*

$yy \backsim cx - \frac{bxx}{a}$ *A l'Ellipſe.*

C'eſt de la même façon que l'on reduira cette Equation cubique, $x^3 - abx \backsim aac$, en ces ſix Lieux ;

$xx \backsim ay$. *A la Parabole.*

$yy - by \backsim cx$. *A la Parabole.*

$xy - bx \backsim ac$. *A l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes.*

$xx - cx \backsim ay + by - yy$ *Au Cercle.*

$xx + cx \backsim yy + ay - by$. *A l'Hyperbole Equilatere.*

$yy \backsim cx + \frac{bxx}{a}$ *A l'Hyperbole Scalene.*

C'eſt encore de la même façon que cette autre Equation cubique $x^3 - abx \backsim -aac$, ſe reduira en ces ſix Lieux;

$xx \backsim ay$. *A la Parabole.*

$yy - by \backsim -cx$. *A la Parabole.*

$xy - bx \backsim -ac$. *A l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes.*

$xx + cx \backsim ay + by - yy$. *Au Cercle.*

$xx - cx \backsim yy + ay - by$. *A l'Hyperbole Equilatere.*

$yy \backsim -cx + \frac{bxx}{a}$ *A l'Hyperbole ſcalene.*

Il y a pluſieurs autres moyens pour reduire en Lieux l'Equation propoſée, $x^3 + abx \backsim aac$, qu'il ſera facile de trouver à celuy qui aura bien entendu les Regles precedentes, où l'on void aiſément qu'on peut commencer par tel Lieu qu'on voudra, pourvû qu'il ſoit convenable à l'Equation, & qu'on en puiſſe commodément tirer d'autres Lieux: & nous n'avons com-

mencé par le Lieu le plus ſimple à la Parabole, que pour avoir auſſi d'autres Lieux plus ſimples.

Par exemple dans l'Equation propoſée, $x^3 + abx \backsim aac$, on auroit pû ſuppoſer au commencement, $x^3 + abx \backsim axy$, ou $xx + ab \backsim ay$, qui eſt un Lieu à la Parabole, & ſi au lieu de $x^3 + abx$, on met ſa valeur aac, au lieu de l'Equation ſuppoſée $x^3 + abx \backsim axy$, on aura celle-cy, $axy \backsim aac$, ou $xy \backsim ac$, qui eſt un Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, & par la comparaiſon de ces deux Lieux, on trouvera ces deux autres, $xx - xy \backsim ay - ab - ac$, $xx + xy \backsim ay - ab + ac$, qui ſont chacun à l'Hyperbole ſcalene, & en comparant ces deux derniers Lieux avec les deux premiers, on en trouvera encore d'autres, & ainſi en ſuite.

Pareillement ſi dans l'Equation, $x^4 + abxx \backsim aacx$, on ajoûte $\frac{1}{4} aabb$, on aura cette autre Equation, $x^4 + abxx + \frac{1}{4} aabb \backsim aacx + \frac{1}{4} aabb$, dont la premiere partie $x^4 + abxx + \frac{1}{4} aabb$ a ſa Racine quarrée, $xx + \frac{1}{2} ab$: c'eſt pourquoy on ſuppoſera $xx + \frac{1}{2} ab \backsim ay$, qui eſt un Lieu à la Parabole, pour avoir $x^4 + abxx + \frac{1}{4} aabb \backsim aayy$, ou $aacx + \frac{1}{4} aabb \backsim aayy$, ou $cx + \frac{1}{4} bb \backsim yy$, qui eſt un autre Lieu à la Parabole, lequel êtant ôté du premier $xx + \frac{1}{2} ab \backsim ay$, en ôtant $cx + \frac{1}{4} bb$ de $xx + \frac{1}{2} ab$, & yy de ay, on aura ce Lieu au Cercle, $xx - cx - \frac{1}{4} bb + \frac{1}{2} ab \backsim ay - yy$, dont le Rayon eſt le même que celuy d'auparavant, & en ôtant yy de $xx - \frac{1}{2} ab$, & $cx + \frac{1}{4} bb$ de ay, on aura ce Lieu à l'Hyperbole Equilatere, $xx + \frac{1}{2} ab - yy \backsim ay - cx - \frac{1}{4} bb$, &c.

Comme le Lieu à l'Hyperbole Equilatere eſt plus ſimple que celuy à l'Hyperbole ſcalene, nous vous enſeignerons icy le moyen de changer un Lieu à l'Hy-

perbole Scalene en un Lieu à l'Hyperbole Equilatere.

Changer un Lieu à l'Hyp. Scalene en un Lieu à l'Hyperbole Equilatere.

Pour changer en un Lieu à l'Hyperbole Equilatere ce Lieu à l'Hyperbole Scalene, $yy \backsim cx + \frac{bxx}{a}$ qui a été trouvé dans l'Equation $x^3 - abx \backsim aac$, changez premierement la fraction $\frac{bxx}{a}$ en une autre qui soit quarrée, en multipliant le numerateur & le denominateur par a ou par b : si on les multiplie par a, on aura cette autre fraction, $\frac{abxx}{aa}$, & si l'on reduit le plan ab, au Quarré dd, on aura cette fraction quarrée, $\frac{ddxx}{aa}$, dont la Racine quarrée est $\frac{dx}{a}$ qu'on nommera z, pour avoir $x \backsim \frac{az}{d}$, & $\frac{ddxx}{aa}$, ou $\frac{abxx}{aa}$, ou $\frac{bxx}{a} \backsim zz$, & alors le Lieu proposé à l'Hyperbole Scalene, $yy \backsim cx + \frac{bxx}{a}$ se trouvera changé en celuy-cy, $yy \backsim \frac{acz}{d} + zz$, qui est à l'Hyperbole Equilatere.

Quand on a ainsi changé x en $\frac{az}{d}$, on doit remettre dans tous les autres Lieux cette même valeur $\frac{az}{d}$, à la place de x, & comme il arrive icy que le Lieu au Cercle $xx - cx \backsim ay + by - yy$, se change en ce Lieu à l'Ellipse, $\frac{aazz}{dd} - \frac{acz}{d} \backsim ay + by - yy$, on ne tire pas un grand avantage de cette reduction, puisque le Lieu au Cercle est plus simple que celuy à l'Ellipse.

Parce que dans le Lieu proposé $yy \backsim cx + \frac{bxx}{a}$, il n'y a point de second terme, où y se rencontre, on pourra changer ce Lieu en celuy-cy, $\frac{ayy}{b} \backsim \frac{acx}{b} + xx$, & supposer $\frac{ayy}{b} \backsim zz$, pour avoir ce Lieu à l'Hyperbole Equilatere, $zz \backsim \frac{acx}{b} + xx$.

C'est de la même façon que l'on reduira un Lieu à l'Ellipse en un Lieu au Cercle, pourvû que l'angle des deux quantitez inconnuës soit droit, ce que nous supposerons toûjours.

Comme

Comme dans la reduction de l'Equation proposée en Lieux, $x^3 + abx \backsim aac$, nous avons commencé par ce Lieu à la Parabole, $xx \backsim dy$, dont le Parametre d, est indeterminé, on connoît d'abord qu'ainsi on a un Lieu à des Paraboles infinies, & par consequent à une Parabole donnée, puisque l'on peut égaler ce Parametre indeterminé à tel Parametre que l'on voudra.

Reduire un Lieu à l'Ellipse à un Lieu à des Ellipses infinies.

Mais on peut aussi reduire un Lieu à l'Ellipse à un Lieu à des Ellipses infinies, & consequemment à une Ellipse semblable à une donnée, c'est à-dire à une dont le Diametre & son Parametre soient en raison donnée, comme dans la raison de d à p.

Dans l'Equation proposée $x^3 + abx \backsim aac$, nous avons trouvé ce Lieu à l'Ellipse, $yy \backsim cx - \frac{bxx}{a}$ que vous changerez en un Lieu à des Ellipses infinies, en supposant $y \backsim \frac{mz}{n}$, les quantitez m, n, étant indeterminées, car il viendra $\frac{mmzz}{nn} \backsim cx - \frac{bxx}{a}$ ou $\frac{ammzz}{bnn} \backsim \frac{acx}{b} - xx$, qui est un Lieu à des Ellipses infinies, parce que les quantitez m, n, étant indeterminées, on les peut prendre en une infinité de manieres differentes, & comme il suffit icy pour nôtre dessein, d'avoir une seule lettre indeterminée, on peut changer n en a; pour avoir ce Lieu plus simple à l'Ellipse, $\frac{mmzz}{ab} \backsim \frac{acx}{b} - xx$, ou $\frac{mmzz}{ab} \backsim \frac{aacc}{4bb} - \omega\omega$, en supposant $x \backsim \omega + \frac{ac}{2b}$, pour ôter le second terme, & alors on connoîtra que le Diametre de cette Ellipse est à son Parametre, comme mm à ab, & parce que cette raison doit être égale à celle de d à p, on aura cette analogie, $mm, ab :: d, p$, & par consequent cette Equation, $pmm \backsim abd$, dans laquelle on trouvera $mm \backsim \frac{abd}{p}$ & le Lieu

precedent $\frac{mmzz}{ab} \backsim \frac{aacc}{4bb} - \omega\omega$, se changera en celuy-cy, $\frac{dzz}{p} \backsim \frac{aacc}{4bb} - \omega\omega$, qui est à une Ellipse, dont le Diametre est bien à son Parametre, comme d à p.

C'est de la même façon que l'on reduira un Lieu à une Hyperbole à un autre à des Hyperboles infinies, & par consequent à une Hyperbole semblable à une donnée ; & l'on pourroit faire même que le Lieu fût donné, si des trois quantitez connuës a, b, c, qui se rencontrent dans l'Equation proposée $x^3 + abx \backsim aac$, l'une êtoit indeterminée. Il faut donc auparavant que de reduire l'Equation en Lieux, la changer en une autre, où il y ait au moins une lettre indeterminée, outre l'inconnuë, comme vous allez voir, à l'égard de la même Equation proposée, $x^3 + abx \backsim aac$.

Choisissez une quantité indeterminée, comme r, & supposez $x \backsim \frac{rz}{r}$, & non pas $x \backsim \frac{rz}{z}$, parce que la quantité indeterminée r, monteroit à un degré trop élevé, pour la pouvoir connoître par le Cercle & par la Ligne droite, quand le Lieu sera donné, comme l'on pretend icy.

Ayant donc supposé $x \backsim \frac{rz}{r}$, l'Equation proposée $x^3 + abx \backsim aac$, se changera en celle-cy, $z^3 + \frac{brrz}{a} \backsim \frac{crr}{a}$, que l'on reduira aisément en ces six Lieux, qui appartiennent tous à des Lignes courbes infinies, à cause de la quantité indeterminée r, qui demeure dans chacun.

$zz \backsim ry$. *A la Parabole.*
$yy + \frac{bry}{a} \backsim \frac{crz}{a}$. *A la Parabole.*
$yz + \frac{brz}{a} \backsim \frac{crr}{a}$. *A l'Hyperbole entre ses Asymptotes.*
$zz - \frac{crz}{a} \backsim ry - \frac{bry}{a} - yy$. *Au Cercle.*

$zz - yy - \frac{bry}{a} \backsim ry - \frac{crz}{a}$. *A l'Hyperbole Equilatere.*

$yy \backsim \frac{crz}{a} - \frac{bzz}{a}$. *A l'Ellipſe.*

Pour changer le premier Lieu à la Parabole, $zz \backsim ry$, dont le Parametre eſt r, en un autre à la Parabole, dont le Parametre ſoit donné, comme d, il n'y a qu'à ſuppoſer $d \backsim r$, & mettant d à la place de r, on aura $zz \backsim dy$, pour le Lieu qu'on cherche.

Changer un Lieu à la Parabole en un autre, qui ſoit donné.

De-même pour changer le ſecond Lieu à la Parabole, $yy + \frac{bry}{a} \backsim \frac{crz}{a}$, dont le Parametre eſt $\frac{cr}{a}$, en un autre à la Parabole, dont le Parametre ſoit donné, comme d, il n'y a qu'à ſuppoſer $\frac{cr}{a} \backsim d$, pour avoir $r \backsim \frac{ad}{c}$, & mettant $\frac{ad}{c}$ à la place de r, on aura $yy + \frac{bdy}{c} \backsim dz$, pour le Lieu qu'on cherche.

Pour changer le Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, $yz + \frac{brz}{a} \backsim \frac{crr}{a}$, où le Rectangle eſt $\frac{cr}{a}$, en un autre où le Rectangle ſoit donné, comme ac, il n'y a qu'à ſuppoſer $\frac{crr}{a} \backsim ac$, pour avoir $r \backsim a$, & mettant a à la place de r, on aura $yz + bz \backsim ac$, pour le Lieu qu'on cherche.

Changer un Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes en un autre, qui ſoit donné.

Pour changer le Lieu au Cercle, $zz - \frac{crz}{a} \backsim ry - \frac{bry}{a} - yy$, dont le Rayon eſt R. $\frac{bbcr}{4aa} - \frac{brr}{2a} + \frac{rr}{4} + \frac{ccrr}{4aa}$, en un autre, dont le Rayon ſoit donné, comme d, il n'y a qu'à ſuppoſer R. $\frac{bbcr}{4aa} - \frac{brr}{2a} + \frac{rr}{4} + \frac{ccrr}{4aa} \backsim d$, pour avoir $rr \backsim \frac{4aadd}{aa - 2ab + bb + cc}$, & par conſequent $r \backsim R \frac{4aadd}{aa - 2ab + bb + cc}$, & ſi à la place de r, on met $R \frac{4aadd}{aa - 2ab + bb + cc}$, on aura $zz - R. \frac{2cdz}{aa - 2ab + bb + cc} \backsim R. \frac{2ady}{aa - 2ab + bb + cc} - R. \frac{2bdy}{aa - 2ab + bb + cc} - yy$, pour le Lieu qu'on cherche.

Changer un Lieu au Cercle en un autre, qui ſoit donné.

Pour changer le Lieu à l'Hyperbole Equilatere, $zz - yy - \frac{bry}{a} \backsim ry - \frac{crz}{a}$, ou $zz + \frac{crz}{a} \backsim yy + ry + \frac{bry}{a}$, dont le Diametre determiné ou ſon Parametre eſt R. $\frac{bbcr}{4aa} + \frac{brr}{2a} + \frac{rr}{4} + \frac{ccrr}{4aa}$, en un autre Lieu à l'Hyperbole Equilatere,

Changer un Lieu à l'Hyperbole Equilatere en un autre, qui ſoit donné.

dont le Diametre ou ſon Parametre ſoit donné, comme d; il n'y a qu'à ſuppoſer R. $\frac{bbt}{aaa} \dagger \frac{t}{a} \dagger \frac{t}{t} \dagger \frac{cctt}{4aa} \backsim d$, pour avoir $r \backsim$ R. $\frac{4aadd}{aa \dagger 2ab \dagger bb \dagger cc}$, & mettant R $\frac{4aadd}{aa+2ab+bb+cc}$ à la place de r, on aura $zz \dagger$ R. $\frac{2cdz}{aa \dagger ab \dagger \frac{bb}{2} \dagger cc} \backsim \frac{2ady}{R\ aa+2ab+bb+cc}$ $\dagger$ R. $\frac{2bdy}{aa+2ab+\frac{1}{2}bb+cc} \dagger yy$, pour le Lieu qu'on cherche.

Changer un Lieu à l'Ellipſe en un autre, qui ſoit donné.

Pour changer le Lieu à l'Ellipſe, $yy \backsim \frac{czz}{a} - \frac{bzz}{a}$, dont le Diametre eſt à ſon Parametre, comm a à b, en un autre à l'Ellipſe, dont le Diametre ſoit donné, comme d, & le Parametre ſoit auſſi donné, comme p; parce que le Diametre & le Parametre ſont inégaux, il faut qu'il y ait dans le Lieu propoſé deux lettres indeterminées. Reduiſons donc le Lieu propoſé $yy \backsim \frac{czz}{a} - \frac{bzz}{a}$, en un autre, où il y ait encore une quantité indeterminée outre la quantité r, comme f, ce qui ſe fera ainſi.

Multipliez le premier Lieu à la Parabole, $zz \backsim ry$, par $\frac{f}{a}$ pour avoir cet autre Lieu à la Parabole, $\frac{fzz}{a} \backsim \frac{rfy}{a}$ duquel vous ôterez le Lieu propoſé, $yy \backsim \frac{czz}{a} - \frac{bzz}{a}$, ou $\frac{ayy}{b} \backsim \frac{czz}{b} - zz$, en ôtant $\frac{czz}{b} - zz$ de $\frac{fzz}{a}$, ou $\frac{ayy}{b}$ de $\frac{rfy}{a}$, pour avoir cet autre Lieu à telle Ellipſe que l'on voudra, $\frac{fzz}{a} \dagger zz - \frac{czz}{b} \backsim \frac{rfy}{a} - \frac{ayy}{b}$, ou $\frac{bfzz+abzz}{aa} - \frac{z}{a} \backsim \frac{brfy}{aa} - yy$, dont le Diametre R. $\frac{bbrrff}{a^4} \dagger \frac{cctt}{abt+bf}$ eſt à ſon Parametre, comme $ab \dagger bf$, à aa, & parce que le Diametre donné eſt d, on aura cette Equation, R. $\frac{bbrrff}{a^4} \dagger \frac{cctt}{ab+bf} \backsim d$, dans laquelle on trouvera $r \backsim$ R. $\frac{a^3bdd+aabdf}{abbff+bbffp+aacc}$: & parce que le Diametre eſt au Parametre, comme $ab \dagger bf$ à aa, & que le Parametre donné eſt p, on aura cette analogie, $d, p :: ab \dagger bf, aa$, & par conſequent cette Equation, $aad \backsim abp \dagger bfp$, dans laquelle on trouvera $f \backsim \frac{aad}{bp} - \frac{abp}{bp}$. Ainſi on a determiné la quantité f, dont la valeur $\frac{aad}{bp} - \frac{abp}{bp}$ étant miſe dans la valeur trouvée de r,

cette quantité r ſera auſſi determinée, & le Lieu propoſé à l'Ellipſe, $yy \backsim \frac{crz}{a} - \frac{bzz}{a}$, ſe trouvera reduit à un autre Lieu à l'Ellipſe, dont le Diametre ſera d, & le Parametre ſera p, comme il étoit propoſé.

C'eſt de la même façon que l'on reduira un Lieu à l'Hyperbole Scalene, en un autre à l'Hyperbole Scalene, dont le Diametre & ſon Parametre ſeront donnez.

Il ne reſte plus qu'à vous enſeigner le moyen de joindre enſemble deux de ces Lieux, pour trouver par Geometrie les Racines d'une Equation de trois dimenſions, où le ſecond terme manque, ce qui ſervira generalement pour toutes les autres Equations cubiques, parce qu'elles ſe peuvent reduire à celle-cy. Nous joindrons ſeulement icy le *Cercle* avec la *Parabole*, parce qu'ils ſont les plus ſimples.

PROBLEME XI.

Trouver par Geometrie les Racines d'une Equation de trois dimenſions, où le ſecond terme manque.

Toutes les Equations poſſibles de trois dimenſions affectées ſous le côté, ſe peuvent reduire à l'une des trois ſuivantes;

$$x^3 - abx \backsim aac.$$
$$x^3 - abx \backsim -aac.$$
$$x^3 \dagger abx \backsim aac.$$

Pour trouver les Racines de la premiere Equation, $x^3 - abx \backsim aac$ par le moyen du premier Lieu à la Parabole, $xx \backsim ay$, dont le Parametre eſt a, & du Lieu au Cercle, $xx - cx \backsim ay \dagger by - yy$, dont le Rayon Premiere Equation.

est $\frac{1}{2}$ R. $aa + 2ab + bb + cc$. Décrivez sur l'axe AB, la
21. Fig. Parabole FAG, dont le Parametre soit égal à la quantité donnée a, & prenez sur cet axe AB, la Ligne AC $\backsim \frac{1}{2}a$ & la Ligne CD $\backsim \frac{1}{2}b$, pour avoir AD $\backsim \frac{a+b}{2}$ parce que son Quarré $\frac{aa}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{bb}{4}$ se rencontre dans le Rayon du Cercle, & parce qu'il reste encore le Quarré $\frac{cc}{4}$, il faut tirer du point D sur AB, la perpendiculaire DE $\backsim \frac{1}{2}c$, pour avoir le Rayon du Cercle EA $\backsim \frac{1}{2}$ R. $aa + 2ab + bb + cc$. Décrivez donc du centre E, par le sommet A, une circonference de Cercle, qui coupe icy celle de la Parabole aux trois poins F, O, Q, d'où l'on tirera sur l'axe AB, les perpendiculaires FL, OP, QR, qui feront les trois Racines de l'Equation proposée $x^3 - abx \backsim aac$, dont FL, qui est du côté du centre E, sera la Racine veritable, & les deux autres OP, QR, qui sont de l'autre côté, seront les fausses.

Demonstration. Car si l'on suppose FL $\backsim x$, les autres Lignes seront telles que vous les voyez icy marquées,

AC $\backsim \frac{1}{2}a$.
CD $\backsim \frac{1}{2}b$.
DE $\backsim \frac{1}{2}c \backsim$ LN.
AD $\backsim \frac{a+b}{2}$.
FL $\backsim x$.
AL $\backsim y \backsim \frac{xx}{a}$.
EA $\backsim \frac{1}{2}$ R. $aa + 2ab + bb + cc \backsim$ EF.
DL $\backsim \frac{xx}{a} - \frac{a+b}{2} \backsim$ EN.
FN $\backsim x - \frac{1}{2}c$.
OP $\backsim -x$.
QR $\backsim -x$.

& dans le Triangle Rectangle ENF, on trouvera

cette Equation $\frac{x^3}{aa} + \frac{ax}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{bb}{4} + \frac{cc}{4} - \frac{bxx}{2} - cx \backsim \frac{aa}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{bb}{4}$ 21. Fig. $+ \frac{cc}{4}$, ou $x^3 - abx \backsim aac$, qui eſt la même que la propoſée.

La même Equation $x^3 - abx \backsim aac$, viendra encore, en ſuppoſant OP $\backsim -x$, ou QR $\backsim -x$, d'où il ſuit que ces deux ſont les Racines fauſſes, & que la premiere FL, eſt la veritable. Ce qu'il faloit démontrer.

SCOLIE.

Si le Cercle au lieu de couper la Parabole aux deux poins O, Q, la touchoit ſeulement en un point, comme O, alors la Racine FL, ſeroit double de la Racine OP, parce que dans ce cas la Ligne OP, repreſenteroit deux Racines égales.

On tire de cette conſtruction la maniere de reſoudre une Equation pure de trois dimenſions : car quand la quantité b, ſera nulle, le terme abx ſera auſſi nul, & l'Equation propoſée $x^3 - abx \backsim aac$, ſe changera en cette pure, $x^3 \backsim aac$, & alors la Ligne CD $\backsim \frac{1}{2} b$ ſera auſſi nulle, de ſorte que le point D conviendra avec le point C, duquel il faudra tirer ſur l'axe AB la perpendiculaire DE $\backsim \frac{1}{2} c$, & achever le reſte comme auparavant. Equation pure de trois dimenſions.

Pour trouver les Racines de la ſeconde Equation, $x^3 - abx \backsim -aac$, par le moyen du premier Lieu à la Parabole, $xx \backsim ay$, dont le Parametre eſt a, & du Lieu au Cercle, $xx + cx \backsim ay + by - yy$, dont le Rayon eſt $\frac{1}{2}$ R. $aa + 2ab + bb + cc$, on fera une conſtruction ſemblable à la precedente, & des trois Racines FL, OP, QR, la premiere FL, qui eſt du côté du centre E, ſera la Racine fauſſe, & les deux autres OP, Deuxiéme Equation.

22. Fig QR, seront les veritables, & la demonstration s'en fera de la même façon.

Il ne reste donc plus icy qu'à faire la determination des trois quantitez connuës a, b, c, pour empêcher que les deux Racines veritables OP, QR, ne soient imaginaires. On void aisément qu'en quelque Lieu que soit le centre E, du Cercle, ce Cercle coupera toûjours la Parabole du côté du centre E, & qu'ainsi dans cette Equation, $x^3 - abx \backsim -aac$, la Racine fausse FL sera toûjours réelle, & que les deux veritables OP, QR, qui sont de l'autre côté, peuvent être imaginaires, parce qu'il se peut faire que le Cercle ne rencontre point de ce côté-là la Parabole, sçavoir quand la Ligne DE, sera extrémement grande, & hors des limites qu'elle doit avoir, & que nous allons icy prescrire, par raport aux deux quantitez connuës a, b.

Determination. Si le Cercle ne faisoit que toucher la Parabole, on auroit cette Equation, $x^3 \backsim \frac{1}{2}aac$, & par consequent $x \backsim$ RC. $\frac{1}{2}aac$, & l'Equation proposée $x^3 - abx \backsim -aac$, se changera en celle-cy, $\frac{1}{2}aac - ab$ RC. $\frac{1}{2}aac \backsim -aac$, dans laquelle on trouvera $\frac{1}{2}c \backsim$ R $\frac{b^3}{27a^2}$. Donc puisque $\frac{1}{2}c$, ou DE, est égale à R $\frac{b^3}{27a^2}$, quand le Cercle touche la Parabole, elle ne doit par être plus grande que R $\frac{b^3}{27a^2}$, autrement le Cercle ne rencontreroit pas la Parabole de ce côté-là, & les deux Racines OP, QR, seroient imaginaires.

Troisiéme Equation. Pour trouver les Racines de la troisiéme Equation, $x^3 + abx \backsim aac$, par le moyen du premier Lieu à la Parabole $xx \backsim ay$, dont le Parametre est a, & du Lieu au Cercle, $xx - cx \backsim ay - by - yy$, dont le Rayon est $\frac{1}{2}$R. $aa -$

$\frac{1}{2}$ R. $\overline{aa - 2ab + bb + cc}$, on fera une coſtruction ſemblable à la precedente, excepté qu'on fera CD $\backsim \frac{1}{2}b$, depuis C vers A, & la Ligne FL ſera la Racine veritable de l'Equation propoſée $x^3 + abx \backsim aac$, les deux autres étant imaginaires, & la demonſtration s'en fera de la même façon. 23 Fig.

AC $\backsim \frac{1}{2}a$.
CD $\backsim \frac{1}{2}b$.
DE $\backsim \frac{1}{2}c \backsim$ NL.
AD $\backsim \frac{b-a}{2}$.
FL $\backsim x$.
AL $\backsim y \backsim \frac{xx}{a}$.
DL $\backsim \frac{xx}{a} + \frac{b-a}{2} \backsim$ EN.
FN $\backsim x - \frac{1}{2}c$.
EA $\backsim \frac{1}{2}$ R. $aa - 2ab + bb + cc \backsim$ EF.

SCOLIE.

Cette même Equation, $x^3 + abx \backsim aac$, ſe peut reſoudre tres-ſimplement par un Cercle & par une Hyperbole entre ſes Aſymptotes, lorſqu'elle eſt reduite à cette forme, $x^3 + ddx \backsim ddm$, ce qui ſe peut faire en cherchant aux trois quantitez b, a, c, une quatriéme proportionelle m, & entre les deux a, b, une moyenne d.

Ayant donc reduit l'Equation propoſée $x^3 + abx \backsim aac$, en celle-cy, $x^3 + ddx \backsim ddm$, voicy comment vous en pourrez connoître la Racine veritable, par l'interſection d'un Cercle & d'une Hyperbole entre ſes Aſymptotes.

Décrivez un Cercle du centre F, dont le Rayon DF ou EF $\backsim \frac{1}{2}m$, & tirez à ſon Diametre DE, par 24 Fig.

14. Fig. l'extremité D, la perpendiculaire DB, que vous prolongerez en A, en ſorte qu'on ait DA ∽ d, pour élever du point A ſur AB, la perpendiculaire AC, & pour décrire par l'autre extremité E, du même Diametre DE, entre les Aſymptotes AB, AC, une Hyperbole, qui coupe icy le Cercle au point G, d'où l'on tirera ſur AB, la perpendiculaire GH, qui ſera la Racine veritable de l'Equation propoſée $x^3 + ddx \backsim ddm$.

Demonſtration. Car ſi l'on ſuppoſe GH ∽ x, les autres Lignes ſeront telles que vous les voyez icy marquées,

AD ∽ d.
DE ∽ m.
DF ∽ $\frac{1}{2}m$ ∽ EF ∽ FG.
GH ∽ x ∽ DI.
AH ∽ $\frac{dm}{x}$ ∽ y.
DH ∽ $\frac{dm}{x} - d$ ∽ IG.
FI ∽ $\frac{1}{2}m - x$.

& dans le Triangle rectangle FLG, on trouvera cette Equation, $\frac{1}{4}mm - mx + xx + \frac{dmm}{2x} - \frac{ddmm}{2x} + dd \backsim \frac{1}{4}mm$, ou $x^4 - mx^3 + ddxx - 2ddmx + ddmm \backsim 0$, laquelle étant diviſée par $x - m$, on aura celle-cy, $x^3 + ddx - ddm \backsim 0$, ou $x^3 + ddx \backsim ddm$, qui eſt la même que la propoſée.

Origine de la conſtruction precedente. Pour vous faire voir l'origine de la conſtruction precedente, multipliez l'Equation propoſée $x + ddx \backsim ddm$, par $x - m$, pour avoir cette autre Equation, $x^4 + ddxx - mx^3 - ddmx \backsim mddx - ddmm$, & ſuppoſez $dm \backsim xy$, qui eſt un Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, tel que nous l'avons décrit, & mettant xy à la place de dm, on aura cette autre Equation, $x^4 +$

$ddxx - m\bar{x}^3 - dxxy \backsim dxxy - xxyy$, ou $xx \dagger dd - mx \backsim 2dy - yy$, qui eſt un Lieu au Cercle, dont le Rayon eſt $\pm m$, tel que nous l'avons décrit.

C'eſt de la même façon que l'on peut reſoudre les deux premieres Equations, $x^3 - abx \backsim aac$, $x^3 - abx \backsim -aac$, & cela eſt trop facile à comprendre, pour en parler icy davantage.

PROBLEME XII.

Trouver par Geometrie les Racines d'une Equation de trois dimenſions, qui a un ſecond terme.

Nous parlerons premierement icy des Equations cubiques affectées ſous le Quarré, & nous dirons que quand elles ſont poſſibles, elles ſe peuvent toutes reduire à l'une des trois ſuivantes.

$$x^3 - axx \backsim aab.$$
$$x^3 - axx \backsim -aab.$$
$$x \dagger axx \backsim aab.$$

Pour trouver les Racines de la premiere Equation, $x^3 - axx \backsim aab$, décrivez ſur l'axe AB, la Parabole CAD, dont le Parametre ſoit égal à la quantité donnée a, & prenez ſur le même axe AB, la Ligne AE $\backsim a$, & luy tirez par le point E, la perpendiculaire ED, qu'il faut prolonger en F, en ſorte qu'on ait EF $\backsim -b$, pour décrire du centre F, par le point D, une circonference de Cercle, qui coupe icy celle de la Parabole au point C, duquel on tirera ſur l'axe AB, la perpendiculaire CG, qui ſera la Racine veritable de l'Equation propoſée, $x^3 - axx \backsim aab$. Premiere Equation. 15. Fig.

Car ſi l'on ſuppoſe CG $\backsim x$, les autres Lignes ſe- Demonſtration.

25. Fig. ront telles que vous les voyez icy marquées,

$AE \backsim a \backsim DE.$
$EF \backsim \frac{1}{2}b.$
$DF \backsim a + \frac{1}{2}b \backsim CF.$
$CG \backsim x.$
$AG \backsim \frac{xx}{a} \backsim y.$
$EG \backsim \frac{xx}{a} - a.$
$CH \backsim x - \frac{1}{2}b.$

& dans le Triangle rectangle FHC, on trouvera cette Equation, $\frac{x^4}{aa} - xx + aa - bx + \frac{1}{4}bb \backsim aa + ab + \frac{1}{4}bb$, ou $x^4 - aaxx - aabx - a^3b \backsim o$, laquelle êtant diviſée par $x + a$, on aura $x^3 - axx - aab \backsim o$, ou $x^3 - axx \backsim aab$, qui eſt la même que la propoſée.

Origine de la conſtruction precedente.

Pour vous faire voir l'origine de la conſtruction precedente, reduiſons l'Equation propoſée, $x - axx \backsim aab$, en une de quatre dimenſions ſans ſecond terme, en la multipliant par $x + a$, & il viendra cette Equation de quatre dimenſions telle qu'on la demande, $x^4 - aaxx \backsim aabx + a^3b$, & ſi l'on ſuppoſe ce Lieu à la Parabole $xx \backsim ay$, dont le Parametre eſt a, telle que nous l'avons décrite, & qu'on mette ay à la place de xx, & $aayy$ à la place de x^4, l'Equation precedente, $x^4 - aaxx \backsim aabx + a^3b$, ſe changera en celle-cy, $aayy - a^3y + aabx + a^3b$, ou $yy - ay \backsim bx + ab$, qui eſt encore un Lieu à la Parabole lequel êtant ôté du premier $xx \backsim ay$, en ôtant $bx + ab$ de xx, & $yy - ay$ de ay; on aura $xx - bx - ab \backsim 2ay - yy$, qui eſt un Lieu au Cercle, dont le Rayon eſt $a + \frac{1}{2}b$, tel que nous l'avons décrit.

Deuxiéme Equation.

C'eſt de la même façon que l'on reduira la deuxiéme Equation, $x^3 - axx \backsim -aab$, en ce Lieu à la

Parabole, $xx \backsim ay$, dont le Parametre eſt a, & en ce Lieu au Cercle, $xx + bx + ab \backsim 2ay - yy$, dont le Rayon eſt $a + \frac{1}{2}b$, ſçavoir en multipliant l'Equation propoſée $x^3 - axx \backsim -aab$, par $x + a$, pour avoir cette Equation de quatre dimenſions ſans ſecond terme, $x^4 - aaxx \backsim -aabx - a^3b$, & en ſuppoſant ce Lieu à la Parabole, $xx \backsim ay$, car ſi l'on met ay à la place de xx, & $aayy$ à la place de x^4, l'Equation precedente $x^4 - aaxx \backsim -aabx - a^3b$ ſe changera en celle-cy, $aayy - a^3y \backsim -aabx - a^3b$, ou $yy - ay \backsim -bx - ab$, qui eſt un Lieu à la Parabole, lequel étant ôté du premier $xx \backsim ay$, en ôtant $-bx - ab$ de xx, & $yy - ay$ de ay, on aura ce Lieu au Cercle, $xx + bx + ab \backsim 2ay - yy$. 25. Fig.

Comme le Rayon de ce Cercle eſt $a + \frac{1}{2}b$, la conſtruction ſera un peu differente de la precedente, en ce que l'on doit prendre EF $\backsim + \frac{1}{2}b$, depuis E vers D, & comme le Cercle ne coupe la Parabole qu'au point C du côté du centre F, la perpendiculaire CG ſera la Racine fauſſe de l'Equation propoſée, $x^3 - aax \backsim -aab$; & comme dans la 27. *Fig.* le Cercle ſe trouve coupé encore de l'autre côté aux deux poins I, L, les perpendiculaires IK, LM, repreſenteront les Racines veritables, qui ſont imaginaires dans la 26. *Fig.* parce qu'on y a pris la Ligne EF $\backsim + \frac{1}{2}b$, plus grande que dans la *Fig.* 27. Conſtruction. 26. Fig. 27. Fig.

Ainſi vous voyez que dans cette deuxiéme Equation, $x^3 - axx \backsim -aab$, la quantité EF, ou $+ \frac{1}{2}b$, a beſoin de termination, pour empêcher que les deux Racines veritables ne deviennent imaginaires. Pour cette fin voyez la raiſon qui devroit être entre les deux quantitez données a & b, ſi le Cercle ne faiſoit Determination.

que toucher la Parabole au point I.

27. Fig. Analyſe. Suppoſant donc que le Cercle touche la Parabole au point I, la Ligne FI, ſera perpendiculaire à la même Parabole, & l'on aura KN ∽ $\frac{1}{2}a$, par la proprieté de la perpendiculaire de la Parabole, & en ſuppoſant IK ∽ x, on aura AK ∽ $\frac{xx}{a}$, & conſequemment KE ∽ $a-\frac{xx}{a}$, & EN ∽ $\frac{1}{2}a-\frac{xx}{a}$, & dans les Triangles ſemblables IKN, FEN, on aura cette analogie, x, $\frac{1}{2}b :: \frac{1}{2}a \frac{1}{2}a-\frac{xx}{a}$, & par conſequent cette Equation, $\frac{1}{4}ab$ ∽ $\frac{1}{4}ax-\frac{x^3}{a}$, dans laquelle on trouvera b ∽ $2x-\frac{x^3}{aa}$, & l'Equation propoſée x^3-axx ∽ $-aab$, ſe changera en celle-cy, x^3-axx ∽ $-2aax+4x^3$, dans laquelle on trouvera x ∽ $\frac{2a}{3}$, & au lieu de b ∽ $2x-\frac{4x^3}{a^3}$, on aura b ∽ $\frac{2a}{27}$, & par conſequent $\frac{1}{2}b$ ou EF ∽ $\frac{a}{27}$. Puiſque donc la Ligne EF vaut $\frac{a}{27}$, quand le Cercle touche la Parabole, ſi on la fait plus grande, le Cercle ne rencontrera pas la Parabole de ce côté-là, & les deux Racines IK, LM, deviendront imaginaires.

Troiſiéme Equation. C'eſt auſſi de la même façon que l'on reduira la troiſiéme Equation, x^3+axx ∽ aab, en ce Lieu à la Parabole, xx ∽ ay, dont le Parametre eſt a, & en ce Lieu au Cercle, $xx-bx+ab$ ∽ $2ay-yy$, dont le Rayon eſt $a-\frac{1}{2}b$, comme auparavant, ſçavoir en multipliant l'Equation propoſée x^3+axx ∽ aab, par $x-a$, & en achevant le reſte comme auparavant.

Conſtruction. Parce qu'on trouve icy le même Cercle & la même Parabole qu'auparavant, la conſtruction ſera la même que la precedente, & des trois Racines CG, IK, LM, la premiere CG ſera la veritable, & les deux autres IK, LM, les fauſſes, comme il eſt aiſé à démontrer.

C'eſt encore de la même façon, que l'on reduira en deux ſemblables Lieux les Equations cubiques où tous les termes ſont, leſquelles ſe peuvent toutes reduire à l'une des ſept formules ſuivantes, Equation cubique où tous les termes ſont.

$$x^3 + axx + abx \backsim aac.$$
$$x^3 - axx + abx \backsim -aac.$$
$$x^3 + axx - abx \backsim aac.$$
$$x^3 - axx - abx \backsim -aac.$$
$$x^3 - axx + abx \backsim aac.$$
$$x^3 + axx - abx \backsim -aac.$$
$$x^3 - axx - abx \backsim aac.$$

Pour reduire la premiere Equation, $x^3 + axx + abx \backsim aac$, en deux Lieux, dont l'un ſoit à la Parabole, & l'autre au Cercle, multipliez-la par $x - a$, pour avoir cette Equation de quatre dimenſions ſans ſecond terme, $x^4 + abx - aaxx - aabx \backsim aacx - aac$, & ſuppoſez ce Lieu à la Parabole, $xx \backsim ay$, dont le Parametre eſt a, & mettant ay à la place de xx, & $aayy$ à la place de x^4, vous aurez cette autre Equation, $aayy + aaby - a^3y - aabx \backsim aacx - a^3c$, ou $yy + by - ay \backsim bx + cx - ac$, qui eſt un Lieu à une Parabole, lequel étant ôté du premier $xx \backsim ay$, en ôtant $bx + cx - ac$ de xx, & $yy + by - ay$ de ay, on aura ce Lieu au Cercle, $xx - bx - cx + ac \backsim 2ay - by - yy$, dont le Rayon R. $a\frac{1}{2} - ab + \frac{1}{4}bb - ac + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}cc$. Premiere Equation.

Pour joindre le Lieu au Cercle, $xx - bx - cx + ac \backsim 2ay - by - yy$, avec le premier Lieu à la Parabole, $xx \backsim ay$, décrivez ſur l'axe AB, la Parabole CAF, dont le Parametre ſoit égal à la quantité connuë a, & prenez ſur le même axe AB, la Ligne AE $\backsim a$, & luy tirez par le point E, la perpendiculaire EF, ſur la- Conſtruction. 28. Fig.

28. Fig. quelle vous prendrez la Ligne EG $\backsim \frac{b+c}{2}$ pour tirer du point E, sur EF, la perpendiculaire GH $\backsim \frac{1}{2}b$, & pour décrire du centre H, par le point F, une circonference de Cercle, qui coupe icy celle de la Parabole au point I, d'où l'on tirera sur l'axe AB, la perpendiculaire IK, qui sera la Racine veritable de l'Equation proposée, $x^3 + axx + abx \backsim aac$.

Demonstration. Car si l'on suppose IK $\backsim x$, les autres Lignes seront telles que vous les voyez icy marquées,

AE $\backsim a \backsim$ EF.
EG $\backsim \frac{b+c}{2} \backsim$ MH $\backsim$ KL.
GF $\backsim a - \frac{b-c}{2}$.
GH $\backsim \frac{1}{2}b \backsim$ EM.
IK $\backsim x$.
AK $\backsim \frac{xx}{a} \backsim y$.
EK $\backsim a - \frac{xx}{a} \backsim$ GL.
HL $\backsim a - \frac{1}{2}b - \frac{xx}{a}$.
HF $\backsim$ R. $aa - ab + \frac{1}{4}bb - ac + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}cc$.

& dans le Triangle rectangle HLI, on trouvera cette Equation, $\frac{bb}{4} + \frac{bc}{2} + \frac{cc}{4} - bx - cx = xx + aa - ab + \frac{bxx}{a} + \frac{x^4}{aa} \backsim aa - ab + \frac{bb}{4} - ac + \frac{bc}{2} + \frac{cc}{4}$, ou $x^4 + abxx - aaxx - aacx - aabx + a^3c \backsim o$, laquelle êtant divisée par $x - a$, on aura $x^3 + axx + abx - aac \backsim o$, ou $x^3 + axx + abx \backsim aac$, qui est la même que la proposée.

Deuxiéme Equation. Pour trouver les Racines de la seconde Equation, $x^3 - axx + abx \backsim -aac$, on fera une construction semblable à la precedente, & alors la Ligne IK, representera la Racine fausse, les veritables êtant imaginaires parce que le Cercle ne peut pas rencontrer la Parabole de l'autre côté, car le plus loin qu'il puisse aller c'est au sommet A, sçavoir en ce cas auquel les

Lignes

Lignes EG, GH, seroient égales, ce qui ne pourroit arriver que lorsque la quantité c, seroit nulle, auquel cas l'Equation seroit plane. Mais comme la Ligne GH est moindre que la Ligne EG, lorsque la quantité c est réelle, la Ligne FH sera aussi moindre que la Ligne AH, & le Cercle qui sera décrit du centre H, par le point F, ne rencontrera jamais la Parabole au sommet A, & encore moins au delà du même sommet A. 28. Fig.

Pour trouver les Racines de la troisiéme Equation, $x^3 + axx - abx \backsim aac$, en joignant son Lieu au Cercle, $xx + bx - cx + ac \backsim 2ay + by - yy$, dont le Rayon est R. $aa + ab + \frac{bb}{4} - \frac{bc}{4} - ac + \frac{cc}{4}$, avec son Lieu à la Parabole $xx \backsim ay$, dont le Parametre est a, lesquels on trouvera comme il a été enseigné auparavant, on fera une construction semblable à la precedente, excepté qu'on doit prendre EG $\backsim \frac{b-c}{2}$, & qu'on doit tirer la perpendiculaire GH $\backsim \frac{1}{2}b$, en bas vers B, & la Ligne IK, sera la Racine veritable de l'Equation proposée, $x^3 + axx - abx \backsim aac$, & la demonstration s'en fera comme auparavant. Troisiéme Equation. 29. Fig. Voyez l'Equation suivante.

Pour trouver les Racines de la quatriéme Equation, $x^3 - axx - abx \backsim -aac$, on fera une construction semblable à la precedente, & alors la Ligne IK en representera la Racine fausse, les veritables étant imaginaires, comme dans la seconde Equation, $x^3 - axx + abx \backsim -aac$, en supposant que le centre H, tombe entre l'axe AB, & le point F, ce qui arrivera lorsque b sera moindre que c, comme il a été supposé dans la construction ; car si b avoit été plus grand que c, il auroit falu prendre EG $\backsim \frac{b-c}{2}$ de l'au- Quatriéme Equation.

29. Fig. tre côté, & dans ce cas on auroit le centre H, au delà de l'axe AB, vers C, & de ce même côté on auroit les Racines veritables pour cette Equation, $x^3 - axx - abx \backsim -aac$, & les fausses pour la precedente, $x^3 + axx - abx \backsim aac$.

Cinquiéme Equation. Pour trouver les Racines de la cinquiéme Equation, $x^3 - axx + abx \backsim aac$, en joignant son Lieu au Cercle, $xx + bx - cx - ac \backsim 2ay - by - yy$, dont le Rayon

30. Fig est R. $aa - ab + \frac{bb}{2} + ac - \frac{bc}{2} + \frac{cc}{4}$, avec son Lieu à la Parabole, $xx \backsim ay$, qui se trouveront comme auparavant, on fera une construction semblable à celle de la premiere Equation, $x^3 + axx + abx \backsim aac$, excepté qu'on doit prendre EG $\backsim \frac{c-b}{2}$, de l'autre côté sur la Ligne EF prolongée, si b est moindre que c, comme nous avons supposé icy, & alors la Ligne IK, sera l'une des trois Racines veritables de l'Equation proposée, $x^3 - axx + abx \backsim aac$, les deux autres étant imaginaires, parce que le Cercle ne peut couper la Parabole qu'en un point.

Sixiéme Equation. Pour trouver les Racines de la sixiéme Equation, $x^3 + axx - abx \backsim -aac$, en joignant son Lieu au Cercle,

31. Fig. $xx + bx + cx - ac \backsim 2ay + by - yy$, dont le Rayon est R. $aa + ab + \frac{bb}{2} + ac + \frac{bc}{2} + \frac{cc}{4}$, avec son Lieu à la Parabole, $xx \backsim ay$, on fera une construction semblable à celle de la troisiéme Equation, $x^3 + axx - abx \backsim aac$, excepté qu'on doit prendre EG $\backsim \frac{b+c}{2}$, de l'autre côté sur la Ligne EF, prolongée, & la Ligne IK sera la Racine fausse de l'Equation proposée $x^3 + axx - abx \backsim -aac$, les deux veritables étant imaginaires.

Septiéme Equation. On fera une semblable construction, pour connoître les Racines de la septiéme Equation, $x^3 - axx - abx$

$\backsim aac$, & la Ligne IK, en repreſentera la Racine veritable, les deux fauſſes étant imaginaires. 31. Fig.

COROLLAIRE.

De la conſtruction de ces ſept Equations, où tous les termes ſont, on tirera aiſément une conſtruction pour les trois du *Probl.* XI. où le troiſiéme terme manque, en ſuppoſant la quantité *b* nulle, pour faire évanoüir le troiſiéme terme.

PROBLEME XIII.

Trouver par Geometrie les Racines d'une Equation de quatre dimenſions, où le ſecond terme manque.

Toutes les Equations poſſibles de quatre dimenſions ſans ſecond terme, ſe peuvent reduire à l'une des ſept ſuivantes;

$$x^4 + abxx + aacx \backsim a^3 d.$$
$$x^4 + abxx - aacx \backsim a^3 d.$$
$$x^4 - abxx + aacx \backsim a^3 d.$$
$$x^4 - abxx - aacx \backsim a^3 d.$$
$$x^4 + abxx - aacx \backsim -a^3 d.$$
$$x^4 - abxx + aacx \backsim -a^3 d.$$
$$x^4 - abxx - aacx \backsim -a^3 d.$$

Vous avez appris au *Probl.* III. la maniere de reduire ces Equations en Lieux, & c'eſt pour cela que nous n'en parlerons point icy, & nous enſeignerons ſeulement la maniere de joindre enſemble deux Lieux les plus ſimples, tels que ſont les Lieux *au Cercle* & *à la Parabole*, comme Deſcartes.

Pour trouver les Racines de la premiere Equation, Premiere Equation.

29. Fig. tre côté, & dans ce cas on auroit le centre H, au delà de l'axe AB, vers C, & de ce même côté on auroit les Racines veritables pour cette Equation, $x^3 - axx - abx \backsim -aac$, & les fausses pour la precedente, $x^3 + axx - abx \backsim aac$.

Cinquiéme Equation. Pour trouver les Racines de la cinquiéme Equation, $x^3 - axx + abx \backsim aac$, en joignant son Lieu au Cercle, $xx + bx - cx - ac \backsim 2ay - by - yy$, dont le Rayon est R. $aa - ab + \frac{bb}{4} + ac - \frac{bc}{2} + \frac{cc}{4}$, avec son Lieu à la Parabole, $xx \backsim ay$, qui se trouveront comme auparavant, on fera une construction semblable à celle de la premiere Equation, $x^3 + axx + abx \backsim aac$, excepté qu'on doit prendre EG $\backsim \frac{c-b}{2}$, de l'autre côté sur la Ligne EF prolongée, si b est moindre que c, comme nous avons supposé icy, & alors la Ligne IK, sera l'une des trois Racines veritables de l'Equation proposée, $x^3 - axx + abx \backsim aac$, les deux autres êtant imaginaires, parce que le Cercle ne peut couper la Parabole qu'en un point.

Sixiéme Equation. Pour trouver les Racines de la sixiéme Equation, $x^3 + axx - abx \backsim -aac$, en joignant son Lieu au Cercle, 31. Fig. $xx + bx + cx - ac \backsim 2ay + by - yy$, dont le Rayon est R. $aa + ab + \frac{bb}{4} + ac + \frac{bc}{2} + \frac{cc}{4}$, avec son Lieu à la Parabole, $xx \backsim ay$, on fera une construction semblable à celle de la troisiéme Equation, $x^3 + axx - abx \backsim aac$, excepté qu'on doit prendre EG $\backsim \frac{b+c}{2}$, de l'autre côté sur la Ligne EF, prolongée, & la Ligne IK sera la Racine fausse de l'Equation proposée $x^3 + axx - abx \backsim -aac$, les deux veritables êtant imaginaires.

Septiéme Equation. On fera une semblable construction, pour connoître les Racines de la septiéme Equation, $x^3 - axx - abx$

$\backsim aac$, & la Ligne IK, en repreſentera la Racine veritable, les deux fauſſes êtant imaginaires. 31. Fig.

COROLLAIRE.

De la conſtruction de ces ſept Equations, où tous les termes ſont, on tirera aiſément une conſtruction pour les trois du *Probl.* XI. où le troiſiéme terme manque, en ſuppoſant la quantité *b* nulle, pour faire évanoüir le troiſiéme terme.

PROBLEME XIII.

Trouver par Geometrie les Racines d'une Equation de quatre dimenſions, où le ſecond terme manque.

Toutes les Equations poſſibles de quatre dimenſions ſans ſecond terme, ſe peuvent reduire à l'une des ſept ſuivantes;

$$x^4 + abxx + aacx \backsim a^3 d.$$
$$x^4 + abxx - aacx \backsim a^3 d.$$
$$x^4 - abxx + aacx \backsim a^3 d.$$
$$x^4 - abxx - aacx \backsim a^3 d.$$
$$x^4 + abxx - aacx \backsim -a^3 d.$$
$$x^4 - abxx + aacx \backsim -a^3 d.$$
$$x^4 - abxx - aacx \backsim -a^3 d.$$

Vous avez appris au *Probl.* III. la maniere de reduire ces Equations en Lieux, & c'eſt pour cela que nous n'en parlerons point icy, & nous enſeignerons ſeulement la maniere de joindre enſemble deux Lieux les plus ſimples, tels que ſont les Lieux *au Cercle* & *à la Parabole*, comme Deſcartes.

Pour trouver les Racines de la premiere Equation, Premiere Equation.

32. Fig. $x^4 + abxx + aacx \backsim a^3 d$, en joignant son Lieu au Cercle, $xx + cx - ad \backsim ay - by - yy$, dont le Rayon est R. $\frac{aa}{4} - \frac{ab}{2} + \frac{bb}{4} + \frac{cc}{4} + ad$, avec son Lieu à la Parabole, $xx \backsim ay$, dont le Parametre est a, décrivez sur l'axe AB, la Parabole CAD, dont le Parametre soit égal à la quantité connuë a, & prenez sur cet axe AB, les Lignes AE $\backsim \frac{1}{2}a$, EF $\backsim \frac{1}{2}b$, & AG $\backsim d$; Tirez par le point G, à l'axe AB, la perpendiculaire GH, & par le point F, au même axe AB, la perpendiculaire FI $\backsim \frac{1}{2}c$. Menez la droite FA, & luy tirez par le sommet A, la perpendiculaire AL $\backsim$ GH, pour décrire du centre I, par le point L, une circonference de Cercle, qui coupe icy celle de la Parabole aux deux poins C, D, d'où l'on tirera sur l'axe AB, les perpendiculaires CM, DN, qui feront deux des Racines de l'Equation proposée, $x^4 + abxx + aacx \backsim a^3 d$, les deux autres êtant imaginaires, parce que le Cercle ne peut jamais couper la Parabole qu'en deux poins : desquelles DN, sera la Racine veritable, & CM la fausse, & la demonstration s'en fera comme auparavant.

Deuxiéme Equation. Pour trouver les Racines de la seconde Equation, $x^4 + abxx - aacx \backsim a^3 b$, on fera une construction semblable à la precedente, & alors CM sera la Racine veritable, & DN la fausse.

Troisiéme Equation. 33. Fig. Pour trouver les Racines de la troisiéme Equation, $x^4 - abxx + aacx \backsim a^3 d$, en joignant son Lieu au Cercle, $xx + cx - ad \backsim ay + by - yy$, dont le Rayon est R. $\frac{aa}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{bb}{4} + \frac{cc}{4} + ad$, avec son Lieu à la Parabole, $xx \backsim ay$, on fera une construction semblable à la precedente, excepté qu'on doit prendre EF $\backsim \frac{1}{2}b$, de

l'autre côté, depuis E vers B, & alors la Ligne DN sera la Racine veritable, & CM, la fausse. 33. Fig.

Pour trouver les Racines de la quatriéme Equation, $x^4 - abxx - aacx \backsim a^3d$, on fera une construction semblable à la precedente, & des deux Racines CM, DN, qui se trouvent seulement dans cette Figure, la premiere CM, sera la veritable, & l'autre DN, la fausse. Quatriéme Equation.

Bienque le Cercle ne coupe icy la Parabole du côté opposé à son centre qu'en un point, il peut neanmoins la couper en trois poins de ce même côté, pour les trois Racines fausses de l'Equation proposée, $x^4 - abxx + aacx \backsim a^3d$. qui sont veritables pour la precedente, $x^4 - abxx + aacx \backsim a^3d$, entre lesquelles une sera toûjours réelle, & les deux autres peuvent être imaginaires, comme elles le sont effectivement dans cette Figure, c'est selon le raport de la quantité $\frac{1}{2}c$, ou EF, aux trois autres quantitez connuës a, b, d, qui se peut connoître dans le cas auquel ces trois Racines sont réelles, en supposant premierement que le Cercle touche la Parabole, comme vous allez voir.

Supposant donc que le Cercle touche la Parabole au point D, si l'on suppose DN $\backsim -x$, on aura AN $\backsim \frac{xx}{a}$, & NK $\backsim \frac{1}{2}a$, & par consequent AK $\backsim \frac{xx}{a} + \frac{1}{2}a$, & à cause de AF $\backsim \frac{a+b}{4}$, on aura KF $\backsim \frac{1}{2}b - \frac{xx}{a}$, & dans les Triangles rectangles semblables, KND, KFI, on aura cette analogie, $-x$, $\frac{1}{2}a :: \frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}b - \frac{xx}{a}$, & par consequent cette Equation, $\frac{x^3}{a} - \frac{bx}{2} \backsim \frac{ac}{4}$, dans laquelle on trouvera $\frac{1}{2}c$, ou EF $\backsim \frac{2x^3}{aa} - \frac{bx}{a}$, & au lieu de l'Equation proposée, $x^4 - abxx - aacx \backsim a^3d$, on 34. Fig. Determination.

34. Fig. aura celle-cy, $-3x^4 + abxx \backsim a^3d$, dans laquelle on trouvera $x \backsim$ R. $\frac{ab}{4}$ - R. $\frac{aabb}{16} - \frac{a^3d}{1}$, ou $x \backsim$ R. $\frac{a}{4}$ + R. $\frac{aabb}{16} - \frac{a^3d}{1}$, où l'on void, que $\frac{aabb}{4}$ ne doit pas être moindre que $\frac{a^3d}{1}$, & que par conſequent b ne doit pas être moindre que R 12ad, &c.

Cinquiéme Equation. Pour trouver les Racines de la cinquiéme Equation, $x^4 + abxx - aacx \backsim -a^3d$, en joignant ſon Lieu

35. Fig. au Cercle, $xx - cx + ad \backsim ay - by - yy$, dont le Rayon eſt R. $\frac{aa}{4} - \frac{ab}{2} + \frac{bb}{4} + \frac{cc}{4} - ad$, avec ſon Lieu à la Parabole, $xx \backsim ay$, on fera une conſtruction ſemblable à celle de la premiere Equation, $x^4 + abxx + aacx \backsim a^3d$, excepté qu'au lieu de tirer la Ligne AL égale à GH, perpendiculairement ſur la Ligne AI, il la faut inſcrire dans un demy Cercle décrit à l'entour de la même Ligne AI, parce que dans le Rayon du Cercle il y a $-ad$, qui eſt une marque de ſouſtraction, & les deux perpendiculaires CM, DN, repreſenteront les deux Racines veritables de l'Equation propoſée, $x^4 + abxx - aacx \backsim -a^3d$, les deux autres étant eſſentiellement imaginaires, parce que le Cercle ne ſçauroit jamais couper la Parabole qu'en deux poins.

SCOLIE.

Il peut arriver auſſi que le Cercle ne rencontre point du tout la Parabole, & alors les quatre Racines ſeront imaginaires. Pour connoître le cas auquel les deux Racines veritables CM, DN, ſeront toûjours réelles, cherchons le raport de $\div c$, ou de FI, avec les trois autres quantitez connuës a, b, d, quand le Cercle ne fait que toucher la Parabole.

Determination. Suppoſant donc que le Cercle touche la Parabole

au point D, menons la droite IDK, & ſuppoſons DN ∽ x, pour avoir AN ∽ $\frac{xx}{a}$, & NK ∽ $\frac{1}{2}a$, & par conſequent AK ∽ $\frac{xx}{a} + \frac{1}{2}a$, & à cauſe de AF ∽ $\frac{b}{2}$, on aura KF ∽ $\frac{xx}{a} + \frac{1}{2}b$, & dans les Triangles ſemblables, KFL, KND, on aura cette analogie, $\frac{xx}{a} + \frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$ :: $\frac{1}{2}a$, x, & par conſequent cette Equation, $\frac{x^3}{a} + \frac{bx}{2}$ ∽ $\frac{ac}{4}$, dans laquelle on trouvera $\frac{1}{2}c$, ou FL ∽ $\frac{2x^3}{2a} + \frac{bx}{2}$, & au lieu de l'Equation propoſée, $x^4 + abxx - aacx$ ∽ $-a^3d$, on aura celle-cy, $x^4 + \frac{1}{2}abxx$ ∽ $\frac{1}{2}a^3d$, dans laquelle on trouvera x ∽ R.$-\frac{ab}{c} + $ R$\frac{12bb}{16} + \frac{a^3d}{3}$, & au lieu de $\frac{1}{2}c$, ou FI ∽ $\frac{2x^3}{2a} + \frac{bx}{2}$, on aura une autre valeur pour la Ligne FI. Puiſque donc la Ligne FI, étant de cette grandeur le Cercle touche la Parabole, elle doit être plus grande, afin qu'il la puiſſe couper. 35. Fig.

Pour trouver les Racines de la ſixiéme Equation, $x^4 - abxx + aacx$ ∽ $-a^3d$, en joignant ſon Lieu au Cercle, $xx + cx + ad$ ∽ $ay + by - yy$, avec ſon Lieu à la Parabole, xx ∽ ay, on fera une conſtruction ſemblable à la precedente, excepté qu'on doit prendre EF ∽ $\frac{1}{2}b$, de l'autre côté vers B, & comme le Cercle coupe icy la Parabole aux quatre poins C, D, P, R, les quatre perpendiculaires CM, DN, PQ, RS, ſeront les Racines de l'Equation propoſée, $x^4 - abxx + aacx$ ∽ $-a^3d$, dont les deux premieres CM, DN, ſeront les fauſſes, & les deux autres PQ, RS, ſeront les veritables. Sixiéme Equation. 36. Fig.

Pour trouver les Racines de la ſeptiéme Equation, $x^4 - abxx - aacx$ ∽ $-a^3d$, on fera une conſtruction ſemblable à la precedente, & alors CM, DN, ſeront les deux Racines veritables, & PQ, RS, les deux Septiéme Equation.

36. Fig. fauſſes, leſquelles ſeront imaginaires, quand elles ſeront hors des limites de la determination ſuivante.

Determination. Suppoſant que le Cercle touche la Parabole au point P, menons la droite IKP, & ſuppoſons PQ $\backsim -x$, pour avoir AQ $\backsim \frac{xx}{a}$, & QR $\backsim \frac{1}{2}a$, & conſequemment AK $\backsim \frac{xx}{a} + \frac{1}{2}a$, & à cauſe de AF $\backsim \frac{a+b}{4}$, on aura KF $\backsim \frac{1}{4}b - \frac{xx}{a}$, & dans les Triangles ſemblables IFK, KPQ, on aura cette analogie, $\frac{1}{4}c$, $\frac{1}{4}b - \frac{xx}{a} :: -x$, $\frac{1}{2}a$, & par conſequent cette Equation, $\frac{x^3}{a} - \frac{bx}{2} \backsim \frac{ac}{4}$, dans laquelle on trouverá $\frac{1}{2}c$, ou FI $\backsim \frac{2x^3}{aa} - \frac{bx}{a}$, & l'Equation propoſée, $x^4 - abxx - aacx \backsim -a^3d$, ſe changera en celle-cy, $x^4 - \frac{1}{3}abxx \backsim \frac{1}{3}a^3d$, dans laquelle on trouvera $x \backsim$ R. $\frac{ab}{6}$ + R. $\frac{a^2bb}{36} + \frac{a^3d}{3}$, & au lieu de $\frac{c}{2}$, ou FI $\backsim \frac{3x^3}{4a} - \frac{bx}{4}$, on aura une autre valeur pour la Ligne FI. Puiſque donc la Ligne FI, étant de cette grandeur, le Cercle touche la Parabole, étant moindre, le Cercle coupera la même Parabole.

COROLLAIRE.

De la conſtruction de ces ſept Equations de quatre dimenſions, où le ſecond terme manque, on tirera aiſément une conſtruction pour les Equations de trois dimenſions ſans ſecond terme, en ſuppoſant la quantité d, nulle, & l'on reduira ſans peine toutes ces conſtructions à une ſeule, qui ſera generale pour toutes les Equations de trois & de quatre dimenſions, où le ſecond terme manque, à la maniere de Mr Deſcartes, ſi l'on prend garde que les Racines veritables ſe rencontrent du côté du centre I, dans les Equations où la quantité c, eſt niée, lorſque tous les termes

termes ſont mis d'un ſeul côté, & que quand la même quantité c, eſt affirmée, les Racines veritables ſont du côté oppoſé au centre I, & qu'on doit prendre EF ⌙ $\frac{1}{2}b$, depuis E vers B, ſi la quantité b, eſt niée, ou depuis E vers le ſommet A, ſi la même quantité b, eſt affirmée, & qu'enfin le Cercle doit paſſer par le ſommet A, ſi la quantité d, eſt nulle, c'eſt-à-dire ſi l'Equation n'a que trois dimenſions, & ſi elle en a quatre, le Cercle doit paſſer par le point L, qu'on trouvera en tirant par le ſommet A, à la Ligne AI, la perpendiculaire AL ⌙ GH, ſi la quantité d eſt niée, & ſi elle eſt affirmée, on doit inſcrire la même Ligne AL ⌙ GH, dans un demy Cercle décrit à l'entour de la Ligne AI. 36. Fig.

Nous pourrions icy donner des Regles pour la conſtruction des Equations de quatre dimenſions, où tous les termes ſont, mais cela ſeroit icy inutile, puiſque vous devez étre aſſez ſçavant pour les pouvoir inventer de vous-même, outre que vous en pouvez ôter le ſecond terme, pour les rendre d'une forme ſemblable à l'une des ſept precedentes.

PROBLEME XIV.

Trouver par Geometrie les Racines d'une Equation de cinq & de ſix dimenſions.

Bien que les Equations de cinq & de ſix dimenſions ne ſoient pas d'un ſi grand uſage que les precedentes, nous en dirons pourtant icy quelque choſe, pour vous faire voir que par la jonction de deux Lieux on peut reſoudre tout Probleme poſſible dans les Mathematiques.

Les Equations de cinq & de ſix dimenſions ſe reduiront en Lieux comme celles de trois dimenſions, en commençant par le Lieu à la *Parabole plane*, ou par le Lieu à la *Parabole ſolide*, ou par quelqu'autre Lieu du premier ou du ſecond genre, ſelon la commodité, pour en avoir d'autres, entre leſquels on choiſira les plus ſimples & les plus communs, tels que ſont les Lieux à la *Conchoïde*, à la *Cyſſoïde*, & quelques autres, dont nous parlerons ailleurs.

Equation de cinq dimenſions affectée ſous le Quarré.

Propoſons en premier Lieu cette Equation de cinq dimenſions, $x^5 - aabxx \backsim a^4c$, où le ſecond, le troiſiéme, & le cinquiéme terme manquent. Suppoſez ce Lieu à la Parabole ſolide, $x^3 \backsim aay$, dont le Parametre eſt égal à la quantité connuë a, & mettant aay à la place de x^3, l'Equation propoſée, $x^5 - aabxx \backsim a^4c$, ou $x^5 - aabx^3 \backsim a^4cx$, ſe changera en celle-cy, $a^4yy - a^4by \backsim a^4cx$, ou $yy - by \backsim cx$, qui eſt un Lieu à la Parabole plane, dont le Parametre eſt égal à la quantité connuë c. De la jonction de ces deux Lieux, on tire cette conſtruction.

Conſtruction. 37. Fig.

Décrivez ſur le Diametre BF, la Parabole ſolide ABC, dont le Parametre BH $\backsim a$, & prenez ſur le même Diametre BF, la Ligne BD $\backsim \frac{1}{2}b$, & tirez par le point D, ſur l'axe BF, la perpendiculaire DE $\backsim \frac{bb}{4a}$, pour décrire par les poins E, B, ſur le Diametre DE, la Parabole plane AEB, qui coupe icy la Parabole ſolide ABC au point A, d'où l'on tirera ſur le Diametre BF l'ordonnée AF, qui ſera la Racine veritable de l'Equation propoſée $x^5 - aabxx \backsim a^4c$.

Demonſtration.

Car ſi l'on ſuppoſe AF $\backsim x$, les autres Lignes ſeront telles que vous les voyez icy marquées,

BH ∽ a.

EI ∽ c.

BD ∽ $\frac{1}{2}b$.

DE ∽ $\frac{bb}{4c}$.

AF ∽ x ∽ DG.

BF ∽ $\frac{x^3}{aa}$ ∽ y.

DF ∽ $\frac{x^3}{aa}-\frac{1}{2}b$ ∽ AG.

EG ∽ $x+\frac{bb}{2c}$.

37. Fig.

& parce que le Rectangle IEG, eſt égal au Quarré AG, par la proprieté de la Parabole plane, on aura cette Equation, $cx+\frac{1}{4}bb \backsim \frac{x^6}{a^4}-\frac{bx^3}{aa}+\frac{1}{4}bb$, ou $x^6-aabxx \backsim a^4c$, qui eſt la même que la propoſée.

Ou bien ſuppoſez ce Lieu à l'Hyperbole ſolide entre ſes Aſymptotes, $xxy \backsim aac$, & mettant xxy à la place de aac, l'Equation propoſée $x^6-aabxx \backsim a^4c$, ſe changera en celle-cy, $x^6-aabxx \backsim aaxxy$, ou $x^4 \backsim aay+aab$, qui eſt un Lieu à la Parabole ſolide, dont le Parametre eſt a.

C'eſt pourquoy décrivez ſur le Diametre BF, la Parabole ſolide ABC, ſemblable à la precedente, & prenez ſur ce Diametre BF, la Ligne BD ∽ b, & menez par le point D, parallelement à l'une des ordonnées de la Parabole ſolide, la Ligne DE ∽ a, & par le point E, parallelement au Diametre BF, la Ligne EG ∽ c, pour décrire par le point G, entre les aſymptotes DE, DF, une Hyperbole ſolide, où le ſolide commun ſoit aac, laquelle coupe icy la Parabole ſolide au point A, par lequel on tirera ſur le Diametre BF, l'ordonnée AF, qui ſera la Racine veritable de l'Equation propoſée, $x^6-aabxx \backsim a^4c$.

Autre conſtruction. 38. Fig.

Car ſi l'on ſuppoſe AF ∽ x, les autres Lignes ſe-

Demonſtration.

38 Fig. ront telles que vous les voyez icy marquées,

$DE \backsim a$.
$BD \backsim b$.
$EG \backsim c$.
$AF \backsim x \backsim DH$.
$BF \backsim \frac{x^3}{aa} \backsim \frac{aac}{xx} + b$.
$AH \backsim \frac{aac}{xx} \backsim y$.

& comme la Ligne BF, ſe trouve icy exprimée en deux façons, par la differente proprieté de chaque Lieu, on aura cette Equation $\frac{x^3}{aa} \backsim \frac{aac}{xx} + b$, ou $x^5 - aabxx \backsim aac$, qui eſt la même que la propoſée.

Equation de cinq dimenſions affectée ſous le Quarré quarré.

Propoſons en ſecond Lieu cette Equation de cinq dimenſions, $x^5 - bx^4 \backsim aab^3$, où le troiſiéme, le quatriéme, & le cinquiéme terme manquent. Multipliez-la par a, afin que le dernier terme devienne cubique, & vous aurez cette autre Equation, $ax^5 - abx^4 \backsim a^3b^3$, & ſuppoſez ce Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, $xy \backsim ab$, & mettant xy à la place de ab, on aura cette autre Equation, $ax^5 - x^4y \backsim x^3y^3$, ou $axx - xxy \backsim y^3$, qui eſt un Lieu à la Ciſſoïde, où le Diametre de ſon Cercle generateur eſt a.

Conſtruction. 39 Fig.

C'eſt pourquoy tirez les deux perpendiculaires indefinies AB, AH, & prenez ſur AH, la Ligne AC $\backsim a$, & luy tirez par le point c, la perpendiculaire $CF \backsim b$, pour décrire par le point F, entre les Aſymptotes AB, AH, l'Hyperbole EF, & par le ſommet A, la Ciſſoïde AE, dont l'axe ſoit AB, le Diametre du Cercle generateur ſoit AC, & l'Aſymptote ſoit CFG. Enfin tirez par le point de ſection E, ſur le Diametre AC, la perpendiculaire ED, qui ſera la Racine veritable de l'Equation propoſée, $x^5 - bx^4 \backsim aab^3$.

Car si l'on suppose DE ∽ x, les autres Lignes seront telles que vous les voyez icy marquées, Demonstration.

AC ∽ a. 39. Fig.

CF ∽ b.

DE ∽ x ∽ AI.

AD ∽ y ∽ $\frac{ab}{x}$ ∽ IE.

& parce que le cube de AD, est égal au solide sous CD, & le Quarré DE, par la nature de la Cissoïde, on aura cette Equation, $\frac{a^3b^3}{x^3}$ ∽ $axx - abx$, ou $x^5 - bx^4$ ∽ aab^3, qui est la même que la proposée.

On fera une construction tout-à-fait semblable, pour trouver la Racine veritable de cette autre Equation de cinq dimensions, $x^5 + aabbx$ ∽ a^4bb, excepté qu'il faut tirer sur l'axe AB, l'ordonnée EI, qui sera la Racine veritable qu'on cherche. Equation de cinq dimensions affectée sous le côté.

Proposons encore cette Equation de cinq dimensions $x^5 - aabxx + a^4x$ ∽ a^4c; supposez ce Lieu à la Parabole solide, x^3 ∽ aay, dont le Parametre est a, & mettant aay à la place de x^3, l'Equation proposée, $x^5 - aabxx + a^4x$ ∽ a^4c, ou $x^6 - aabx + a^4xx$ ∽ a^4cx, se changera en celle-cy, $a^4yy - a^4by + a^4xx$ ∽ a^4cx, ou $yy - by$ ∽ $cx - xx$, qui apartient à un Cercle, dont le Rayon est ÷ R. $bb + cc$. Equation de cinq dimensions affectée sous le Quarré & sous le côté.

C'est pourquoy décrivez sur l'axe AB, la Parabole solide CAD, semblable à la precedente & prenez sur le même axe AB, la Ligne AE ∽ ÷ b, & luy tirez par le point E, la perpendiculaire EF ∽ ÷ c, pour décrire du centre F, par le sommet A, une circonference de Cercle, qui coupe icy celle de la Parabole solide au point C, duquel on tirera sur l'axe AB, la perpendiculaire CG, qui sera la Racine ve- Construction. 40. Fig.

40. Fig. ritable de l'Equation proposée, $x^6 - aabxx + a^4x \backsim a^4c$.

Demonst. Car si l'on suppose CG $\backsim x$, les autres Lignes seront telles que vous les voyez icy marquées;

AE $\backsim \frac{1}{2}b$.
EF $\backsim \frac{1}{2}c$.
AF $\backsim \frac{1}{2}$R. $bb + cc \backsim$ CF.
CG $\backsim x$.
AG $\backsim \frac{x^3}{aa} \backsim y$.
EG $\backsim \frac{x^3}{aa} - \frac{1}{2}b \backsim$ FH.
CH $\backsim x - \frac{1}{2}c$.

& dans le Triangle rectangle CHF, on trouvera cette Equation, $xx - cx + \frac{cc}{4} + \frac{x^6}{aa} - \frac{bx^3}{aa} + \frac{bb}{4} \backsim \frac{bb}{4} + \frac{cc}{4}$, ou $x^6 - aabxx + a^4x \backsim a^4c$, qui est la même que la proposée.

Equation de six dimensions affectée sous le cube & sous le côté. Proposons maintenant cette Equation de six dimensions, $x^6 - aabx^3 + a^4cx \backsim a^5d$, où le second, le troisiéme & le cinquiéme terme manquent, supposons ce Lieu à la Parabole solide, $x^3 \backsim aay$, dont le Parametre est a, & mettant aay à la place de x^3, l'Equation proposée, $x^6 - aabx^3 + a^4cx \backsim a^5d$, se changera en celle-cy, $a^4yy - a^4by + a^4cx \backsim a^5d$, ou $yy - by \backsim ad - cx$, qui est un Lieu à la Parabole plane, dont le Parametre est c.

Construction. C'est pourquoy décrivez sur l'axe BD, la Parabole
41 Fig. solide ABC, dont le Parametre soit égal à la quantité connuë a, & prenez sur le même axe BD, la Ligne BD $\backsim \frac{1}{2}b$, & luy tirez par le point D, la perpendiculaire DE $\backsim \frac{bb}{4c} + \frac{a^4}{c}$, pour décrire sur l'axe DE, par le point E, la Parabole plane AEC, dont le Parametre soit égal à la quantité connuë c. Ces deux Paraboles s'entre-coupent icy aux deux poins C, F, d'où l'on tirera sur l'axe BD, les perpendiculaires CG, FI,

dont CG ſera la Racine veritable, & FI la Racine fauſſe de l'Equation propoſée, $x^6 - aabx^3 + a^4cx \backsim a^5d$, & la demonſtration s'en fera comme auparavant, ſur tout ſi l'on regarde la valeur de chaque Ligne, que nous avons icy marquée, 41. Fig.

$$BD \backsim \frac{1}{2}b.$$
$$DE \backsim \frac{bb}{4c} + \frac{ad}{c}.$$
$$CG \backsim x \backsim DH.$$
$$BG \backsim y \backsim \frac{x^3}{aa}.$$
$$EH \backsim \frac{bb}{4c} + \frac{ad}{c} - x.$$
$$CH \backsim R.\frac{bb}{4} + ad - cx \backsim \frac{1}{2}b - \frac{x^3}{aa}.$$

Propoſons encore cette Equation de ſix dimenſions, $x^6 - aabx^3 + a^4xx - a^4cx \backsim a^5d$. Suppoſez ce Lieu à la Parabole ſolide, $x^3 \backsim aay$, dont le Parametre eſt a, & mettant aay à la place de x^3, l'Equation propoſée $x^6 - aabx^3 + a^4xx - a^4cx \backsim a^5d$, ſe changera en celle-cy, $a^4yy - a^4by + a^4xx - a^4cx \backsim a^5d$, ou $yy - by \backsim ad + cx - xx$, qui eſt un Lieu au Cercle, dont le Rayon eſt $R.\frac{bb}{4} + ad + \frac{cc}{4}$. Equation de ſix dimenſions affectée ſous le cube, ſous le Quarré, & ſous le côté.

C'eſt pourquoy décrivez ſur l'axe AB, la Parabole ſolide CAD, ſemblable à la precedente, & prenez ſur le même axe AB, la Ligne $AE \backsim \frac{1}{2}b$, & luy tirez par le point E, la perpendiculaire $EF \backsim \frac{1}{2}c$. Aprés tirez à la Ligne FA la perpendiculaire $AL \backsim R.ad$, pour décrire du centre F, par le point L, une circonference de Cercle, qui coupe icy celle de la Parabole ſolide aux deux poins C, I, d'où l'on tirera ſur l'axe AB, les perpendiculaires, CG, IK, dont CG ſera la Racine veritable, & IK la Racine fauſſe de l'Equation propoſée, $x^6 - aabx^3 + a^4xx - a^4cx \backsim a^5d$, comme il eſt aiſé à démontrer, en regardant le nom de chaque Ligne, qui a êté icy ajoûté. Conſtruction. 42. Fig.

40. Fig. ritable de l'Equation propoſée, $x^5 - aabxx + a^4x \backsim a^4c$.

Demonſtration. Car ſi l'on ſuppoſe CG $\backsim x$, les autres Lignes ſeront telles que vous les voyez icy marquées;

$$AE \backsim \tfrac{1}{2}b.$$
$$EF \backsim \tfrac{1}{2}c.$$
$$AF \backsim \tfrac{1}{2}\text{R.}\ bb + cc \backsim CF.$$
$$CG \backsim x.$$
$$AG \backsim \tfrac{xx}{aa} \backsim y.$$
$$EG \backsim \tfrac{xx}{aa} - \tfrac{1}{2}b \backsim FH.$$
$$CH \backsim x - \tfrac{1}{2}c.$$

& dans le Triangle rectangle CHF, on trouvera cette Equation, $xx - cx + \frac{cc}{4} + \frac{x^6}{a^4} - \frac{bx^3}{aa} + \frac{bb}{4} \backsim \frac{bb}{4} + \frac{cc}{4}$, ou $x^5 - aabxx + a^4x \backsim a^4c$, qui eſt la même que la propoſée.

Equation de ſix dimenſions affectée ſous le cube & ſous le côté. Propoſons maintenant cette Equation de ſix dimenſions, $x^6 - aabx^3 + a^4cx \backsim a^5d$, où le ſecond, le troiſiéme & le cinquiéme terme manquent, ſuppoſons ce Lieu à la Parabole ſolide, $x^3 \backsim aay$, dont le Parametre eſt a, & mettant aay à la place de x^3, l'Equation propoſée, $x^6 - aabx^3 + a^4cx \backsim a^5d$, ſe changera en celle-cy, $a^4yy - a^4by + a^4cx \backsim a^5d$, ou $yy - by \backsim ad - cx$, qui eſt un Lieu à la Parabole plane, dont le Parametre eſt c.

Conſtruction. C'eſt pourquoy décrivez ſur l'axe BD, la Parabole

41 Fig. ſolide ABC, dont le Parametre ſoit égal à la quantité connuë a, & prenez ſur le même axe BD, la Ligne BD $\backsim \frac{1}{2}b$, & luy tirez par le point D, la perpendiculaire DE $\backsim \frac{bb}{4c} + \frac{a^4}{c}$, pour décrire ſur l'axe DE, par le point E, la Parabole plane AEC, dont le Parametre ſoit égal à la quantité connuë c. Ces deux Paraboles s'entre-coupent icy aux deux poins C, F, d'où l'on tirera ſur l'axe BD, les perpendiculaires CG, FI,

dont CG sera la Racine veritable, & FI la Racine fausse de l'Equation proposée, $x^6 - aabx^3 + a^4cx \backsim a^5d$, & la demonstration s'en fera comme auparavant, sur tout si l'on regarde la valeur de chaque Ligne, que nous avons icy marquée, 41. Fig.

BD $\backsim \frac{1}{1} b$.
DE $\backsim \frac{bb}{4c} + \frac{ad}{c}$.
CG $\backsim x \backsim$ DH.
BG $\backsim y \backsim \frac{x^3}{aa}$.
EH $\backsim \frac{bb}{4c} + \frac{ad}{c} - x$.
CH $\backsim$ R. $\frac{bb}{4} + ad - cx \backsim \frac{1}{2} b - \frac{x^3}{aa}$.

Proposons encore cette Equation de six dimensions, $x^6 - aabx^3 + a^4xx - a^4cx \backsim a^5d$. Suppose z ce Lieu à la Parabole solide, $x^3 \backsim aay$, dont le Parametre est a, & mettant aay à la place de x^3, l'Equation proposée $x^6 - aabx^3 + a^4xx - a^4cx \backsim a^5d$, se changera en celle-cy, $a^4yy - a^4by + a^4xx - a^4cx \backsim a^5d$, ou $yy - by \backsim ad + cx - xx$, qui est un Lieu au Cercle, dont le Rayon est R. $\frac{bb}{4} + ad + \frac{cc}{4}$. Equation de six dimensions affectée sous le cube, sous le Quarré, & sous le côté.

C'est pourquoy décrivez sur l'axe AB, la Parabole solide CAD, semblable à la precedente, & prenez sur le même axe AB, la Ligne AE $\backsim \frac{1}{2} b$, & luy tirez par le point E, la perpendiculaire EF $\backsim \frac{1}{2} c$. Aprés tirez à la Ligne FA la perpendiculaire AL $\backsim$ R ad, pour décrire du centre F, par le point L, une circonference de Cercle, qui coupe icy celle de la Parabole solide aux deux poins C, I, d'où l'on tirera sur l'axe AB, les perpendiculaires, CG, IK, dont CG sera la Racine veritable, & IK la Racine fausse de l'Equation proposée, $x^6 - aabx^3 + a^4xx - a^4cx \backsim a^5d$, comme il est aisé à démontrer, en regardant le nom de chaque Ligne, qui a été icy ajoûté. Construction. 42. Fig.

42. Fig.

$AE \backsim \frac{1}{2} b.$
$EF \backsim \frac{1}{2} c \backsim GH.$
$AF \backsim R. \frac{bb+cc}{4}.$
$AL \backsim R\, ad.$
$FL \backsim R. \frac{bb}{4} + ad\, \frac{+cc}{4} \backsim FC.$
$CG \backsim x.$
$AG \backsim y \backsim \frac{x^3}{aa}.$
$EG \backsim \frac{x^3}{aa} - \frac{1}{2} b \backsim FH.$
$CH \backsim x - \frac{1}{2} c.$

Il ne ſera pas plus difficile de reduire en Lieux les autres Equations qui peuvent arriver, & d'en tirer des conſtructions à l'imitation des precedentes.

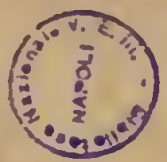
FIN.

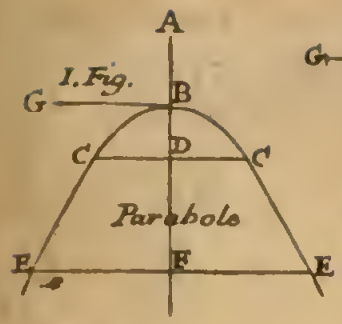
PERMISSION.

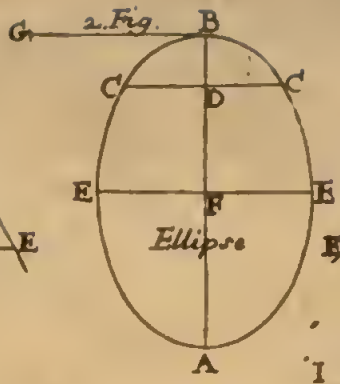
Permis d'imprimer, fait ce 4. Avril 1687.
DE LA REYNIE.

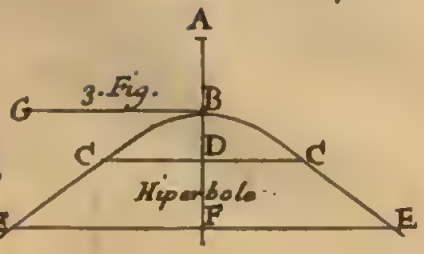
A PARIS,
De l'Imprimerie d'ESTIENNE CHARDON,
ruë Galande, prés ſaint Blaiſe.

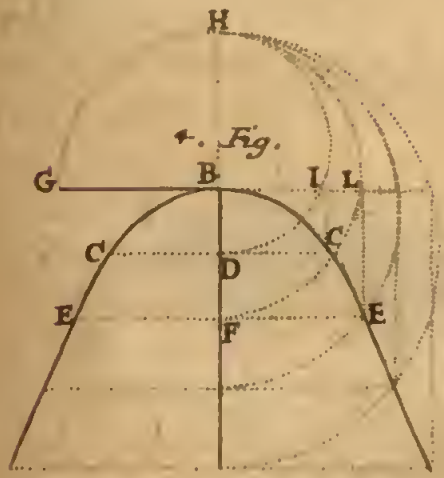
609370

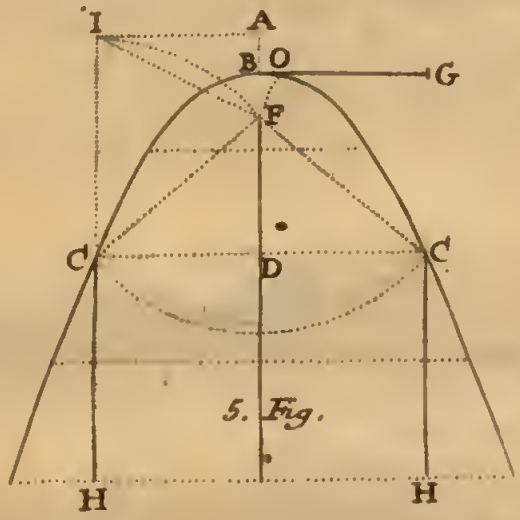


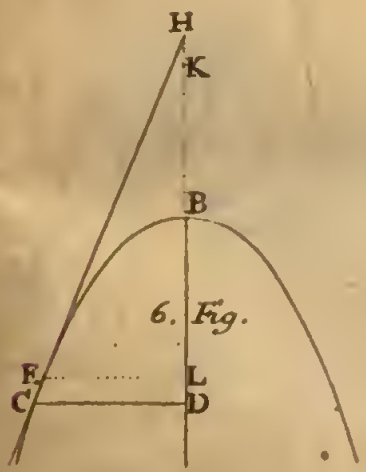

A
1. Fig.
G
B
C
D
C
Parabole
E
F
E

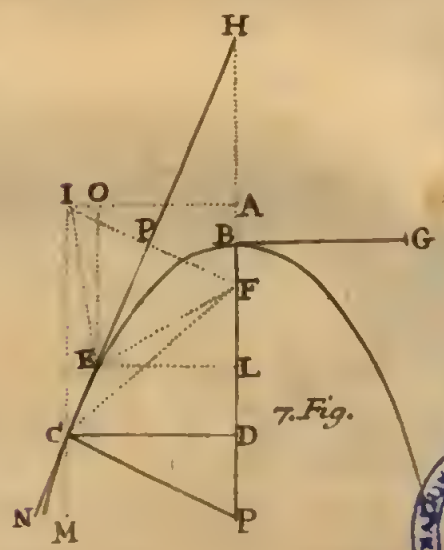

G
2. Fig.
B
C
D
C
E
F
E
Ellipse
A


A
3. Fig.
G
B
C
D
C
Hiperbole
E
F
E

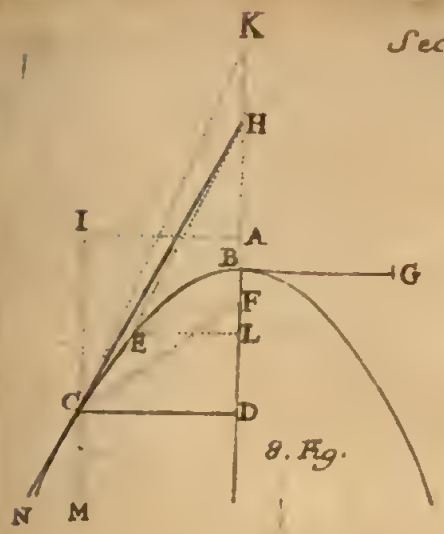

H
4. Fig.
G
B
I
L
C
D
C
E
F
E


I
A
B
O
G
F
C
D
C
5. Fig.
H
H

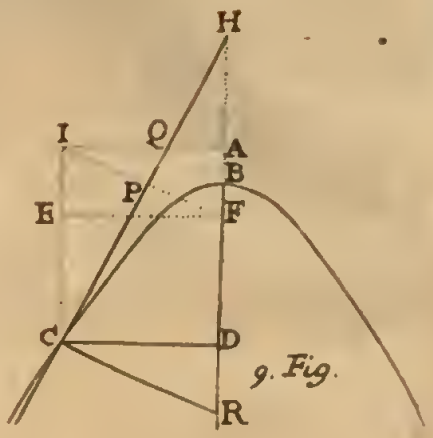

H
K
B
6. Fig.
E
L
C
D


H
I
O
A
P
B
G
F
E
L
7. Fig.
C
D
N
M
P

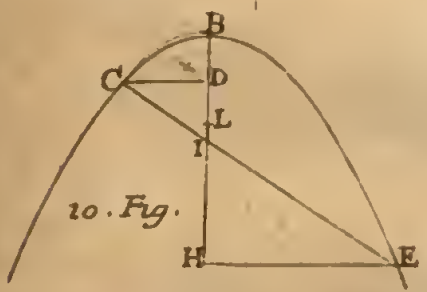
NAPOLI



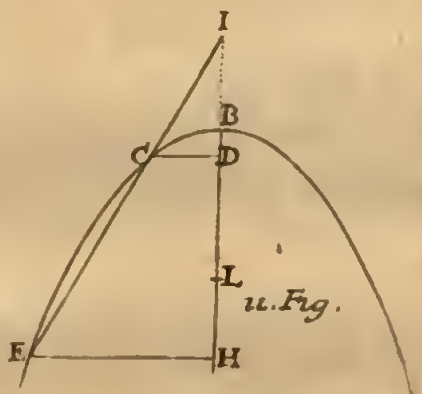
8. Fig.



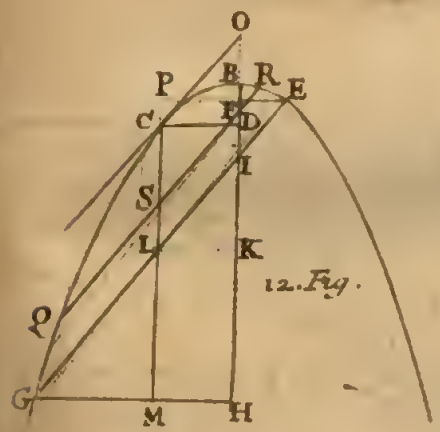
9. Fig.



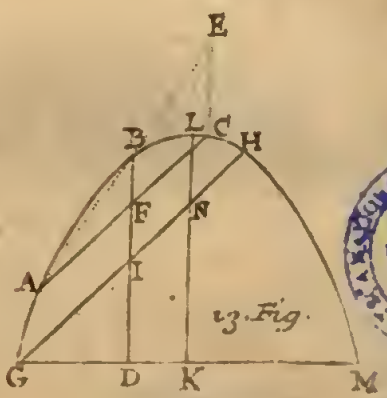
10. Fig.



11. Fig.



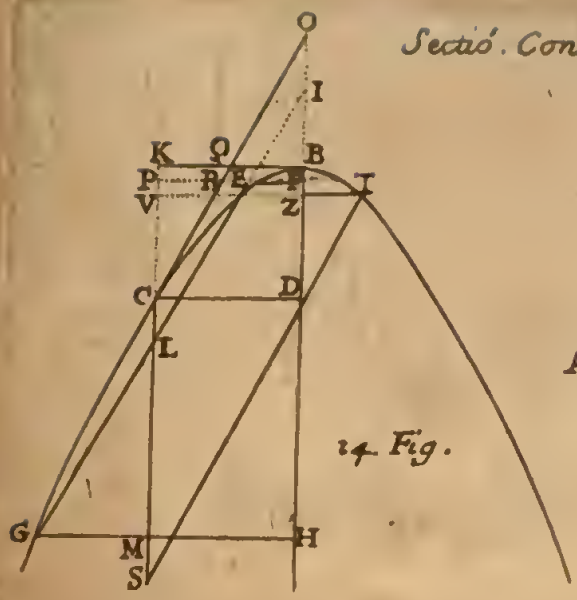
12. Fig.



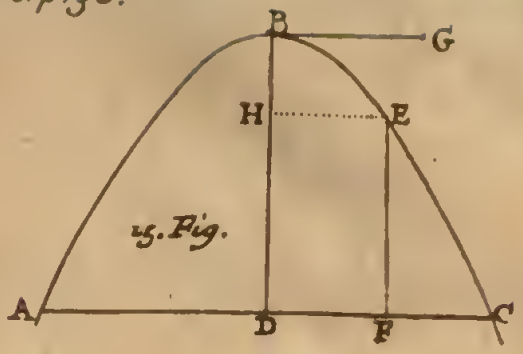
13. Fig.

NANCY

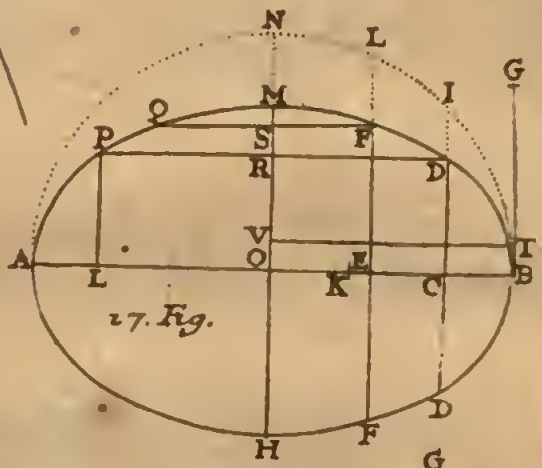
Sectiõ. Con. p. 38.



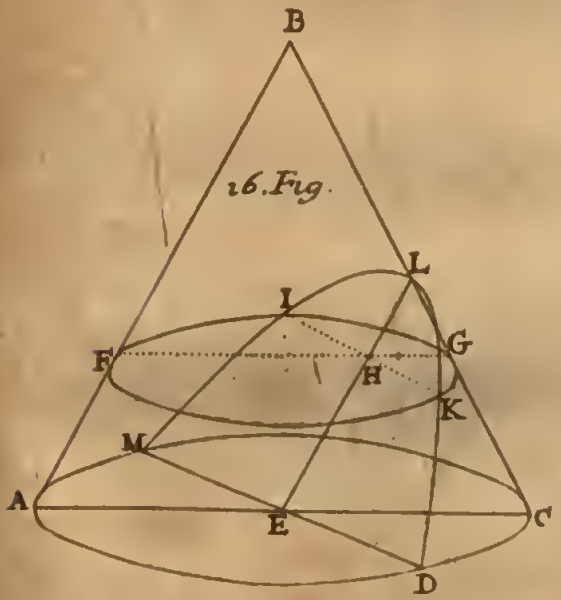
14. Fig.



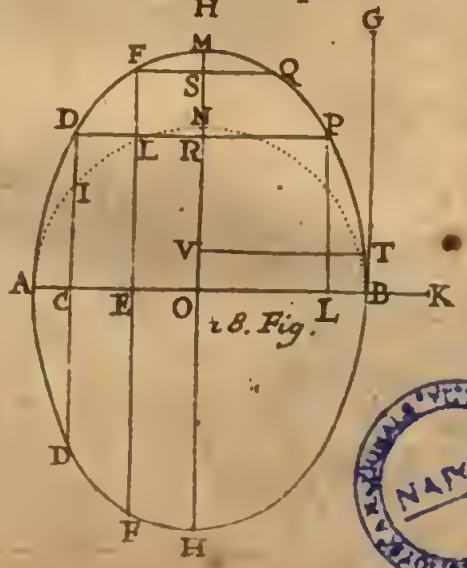
15. Fig.



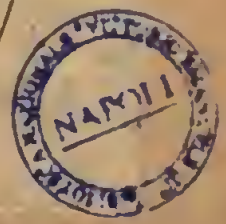
17. Fig.



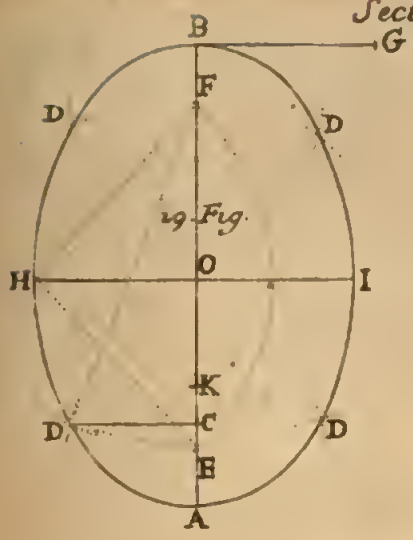
16. Fig.

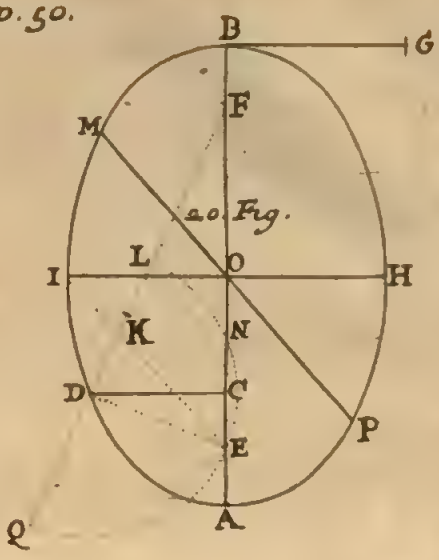


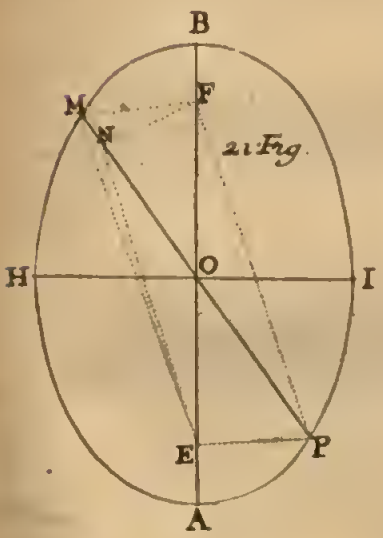
18. Fig.

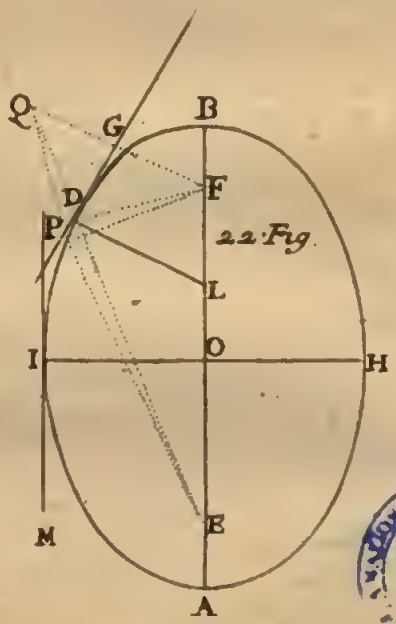


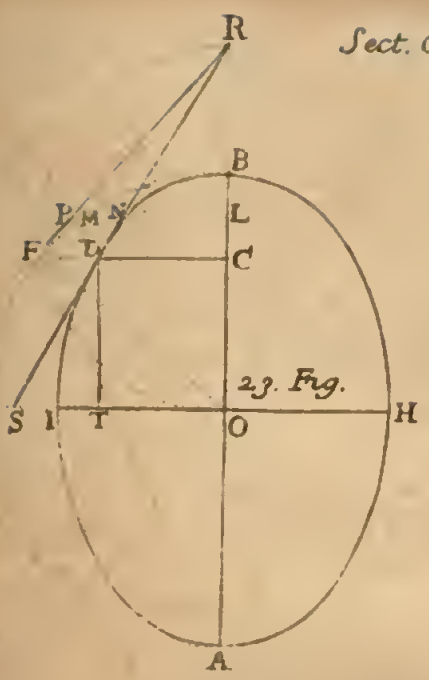
Sect. Con. p. 50.


B
G
F
D
D
19 Fig.
H
O
I
K
D
C
D
E
A

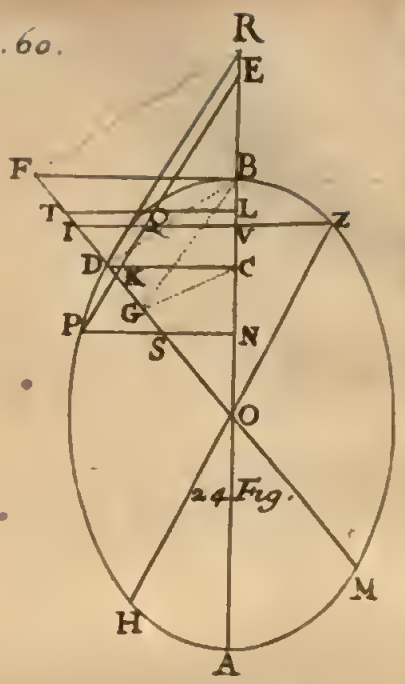

B
G
M
F
20 Fig.
I
L
O
H
K
N
D
C
P
E
Q
A


B
M
F
N
21 Fig.
H
O
I
E
P
A

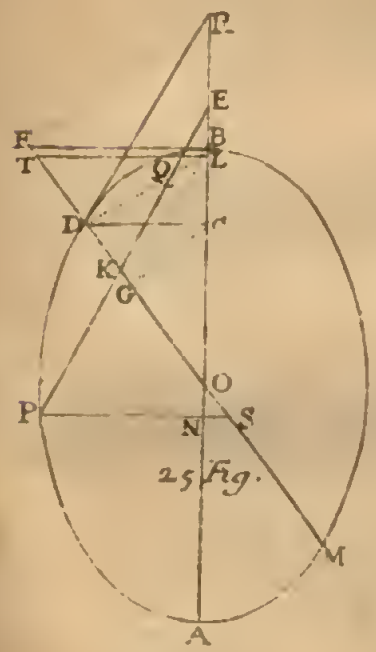

Q
G
B
D
F
P
22 Fig.
L
I
O
H
M
E
A



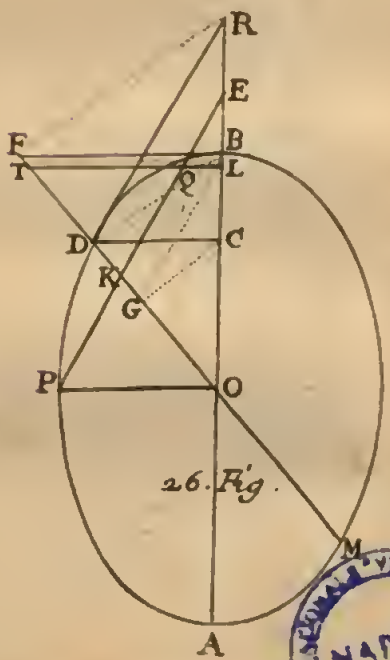
23. Fig.



24 Fig.

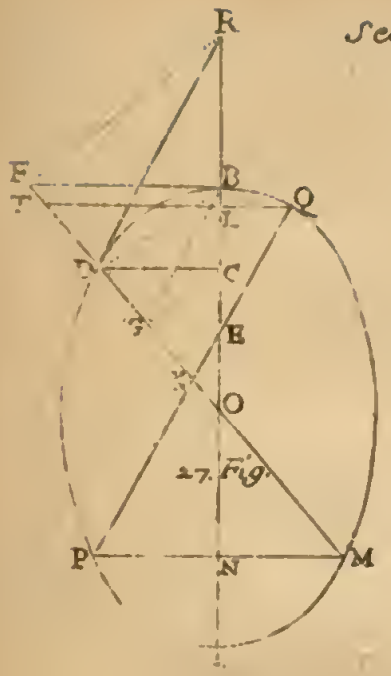


25 Fig.

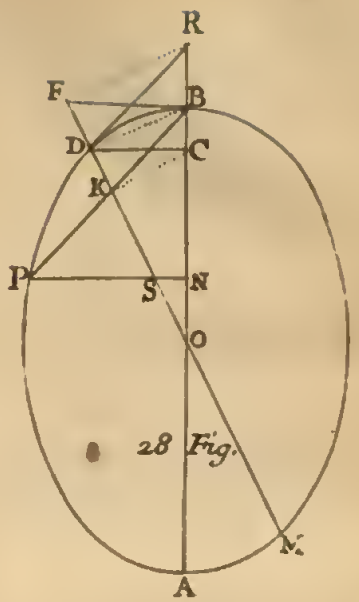


26. Fig.

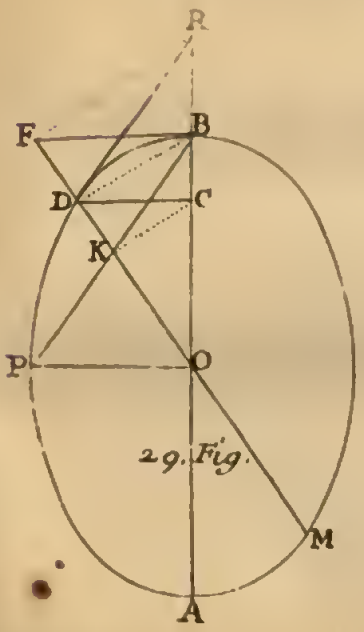
Sect. Con. p. 68



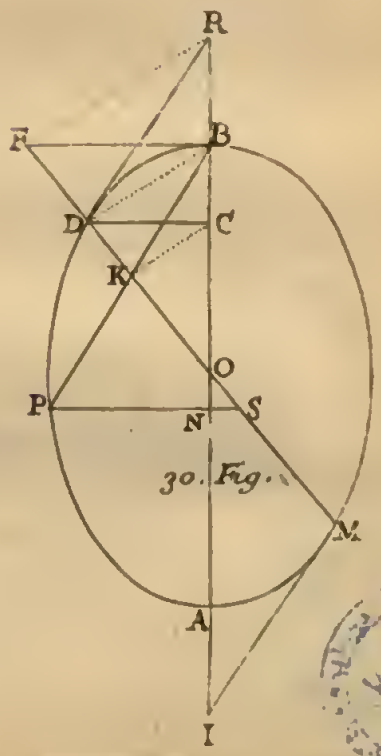
27. Fig.



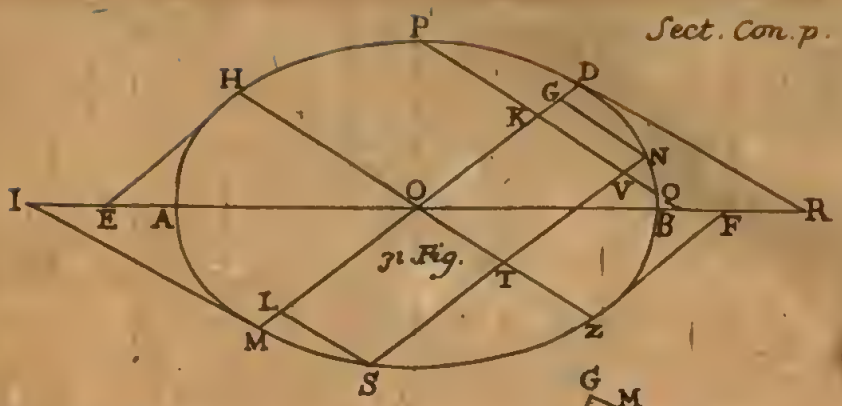
28 Fig.



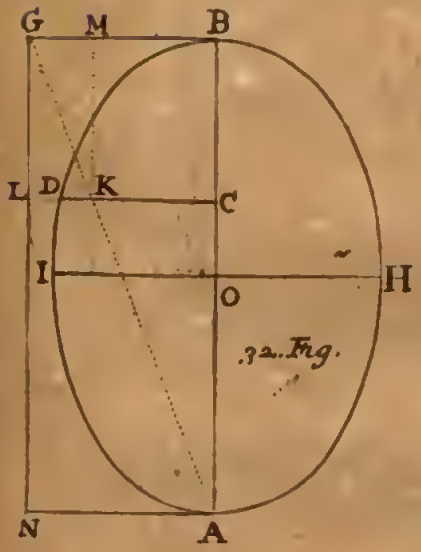
29. Fig.



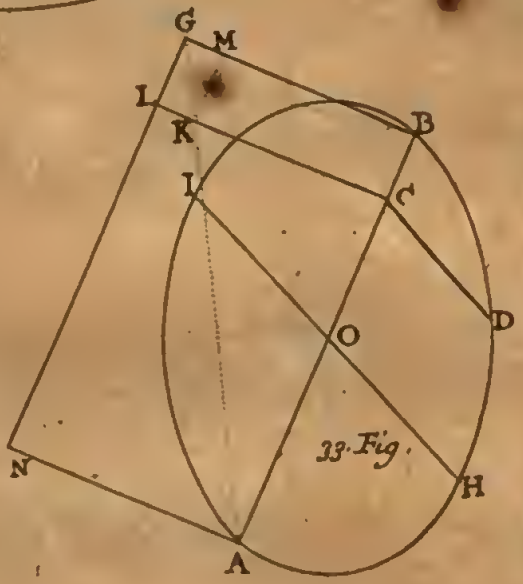
30. Fig.



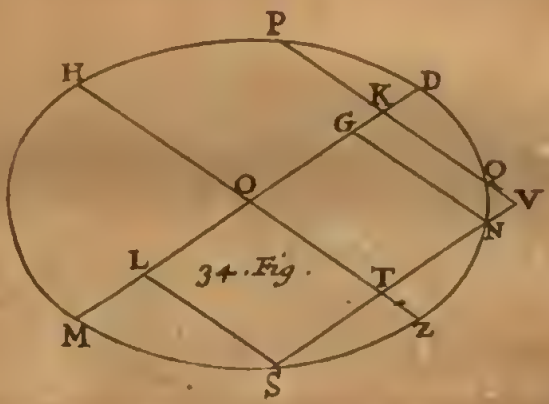
31. Fig.



32. Fig.

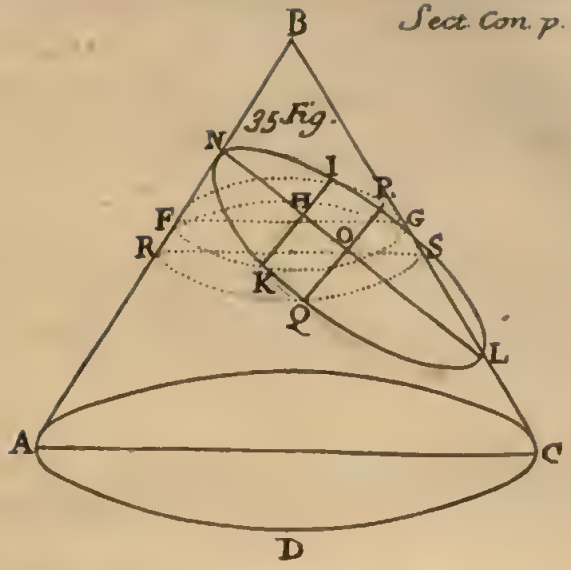


33. Fig.

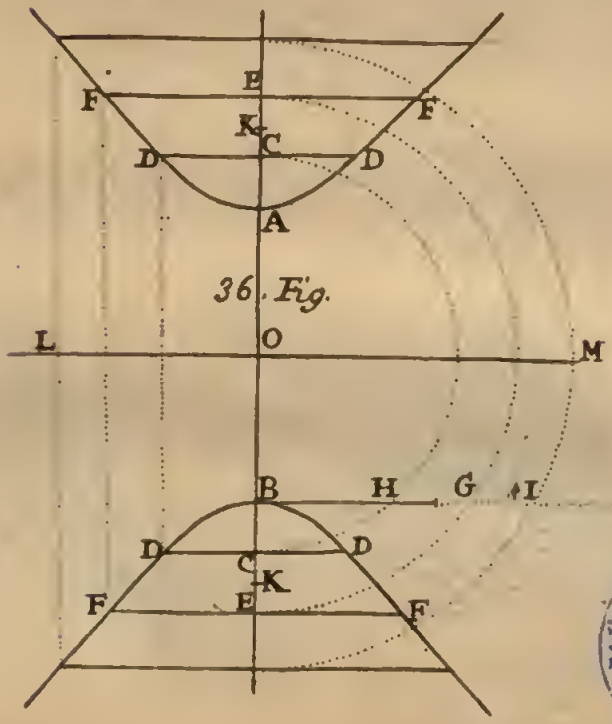


34. Fig.

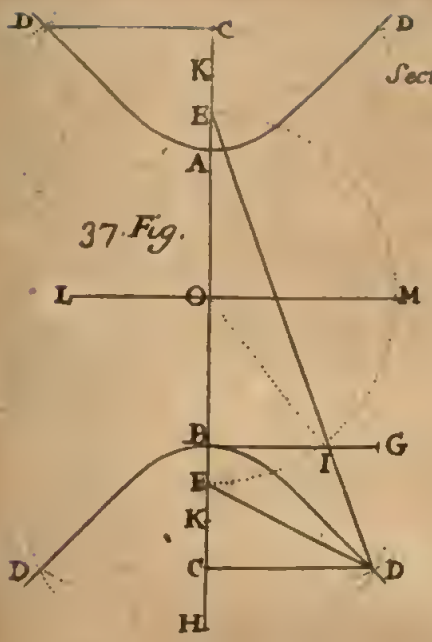
Sect. Con. p. 80.



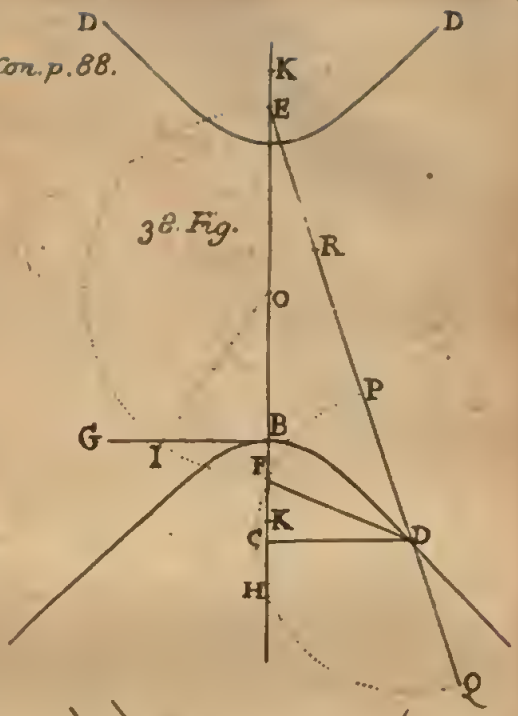
35. Fig.



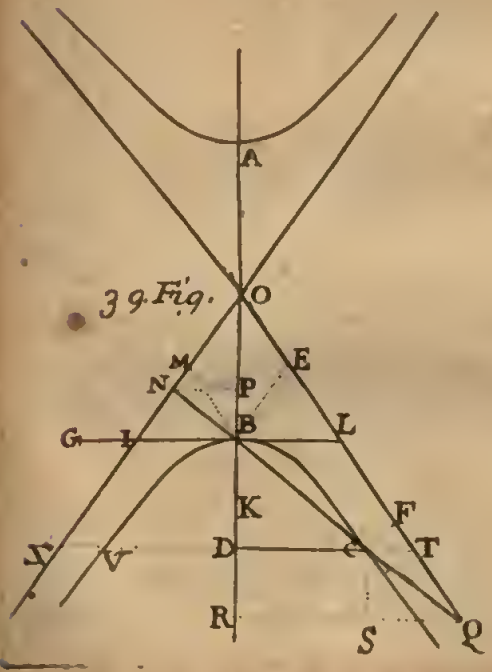
36. Fig.



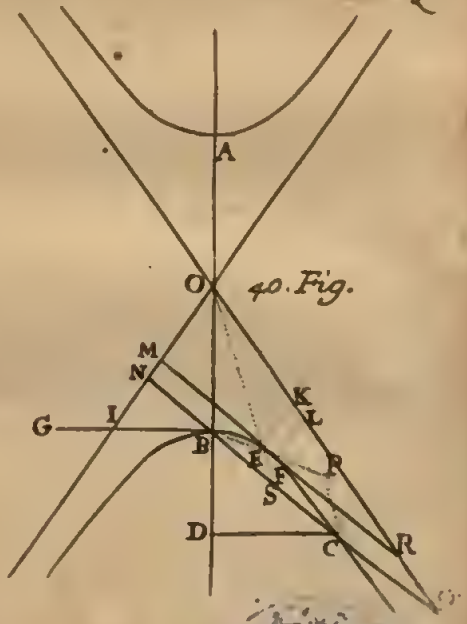
37. Fig.



38. Fig.



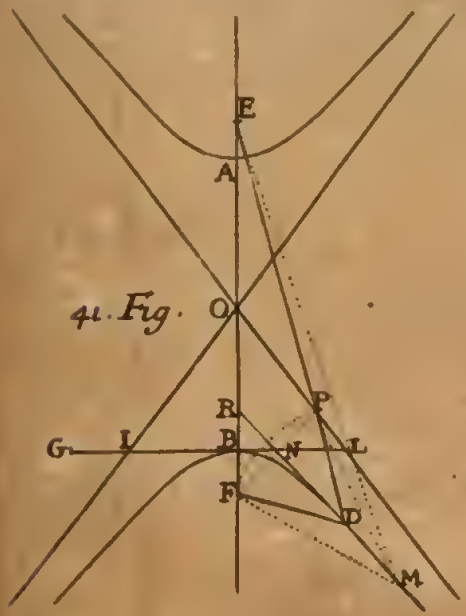
39. Fig.



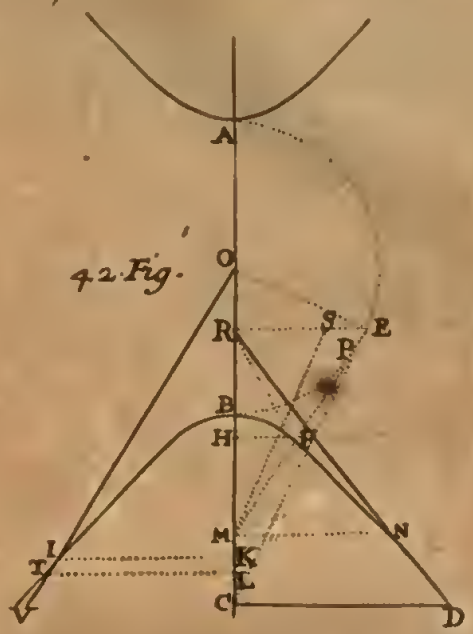
40. Fig.

Sect. Con. p. 107.

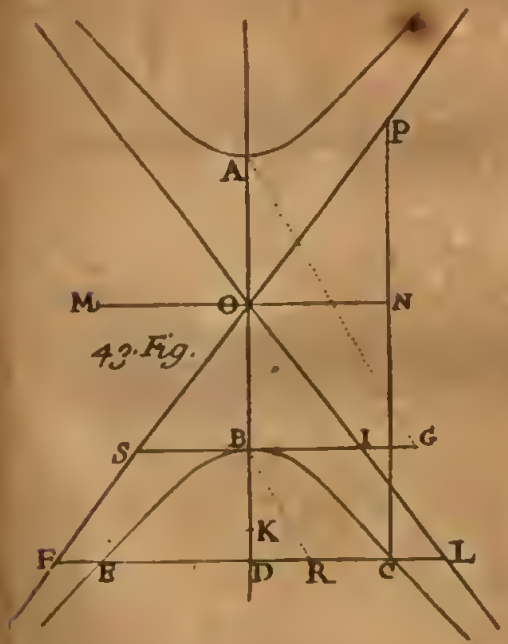
41. Fig.



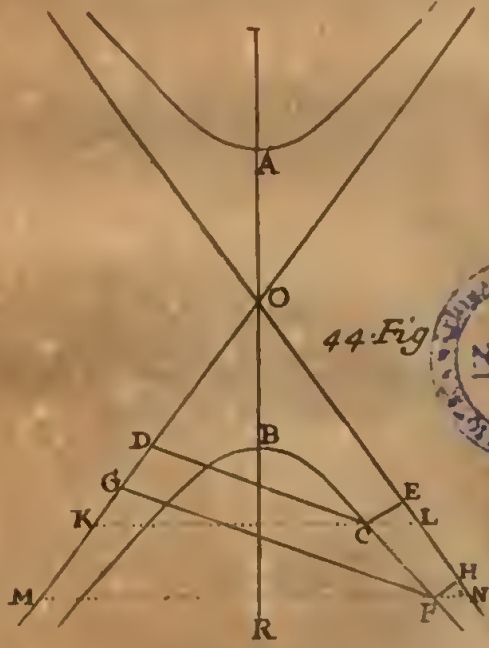
42. Fig.



43. Fig.

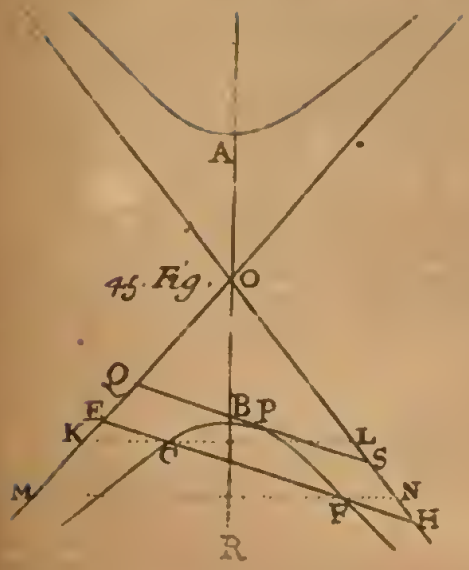


44. Fig

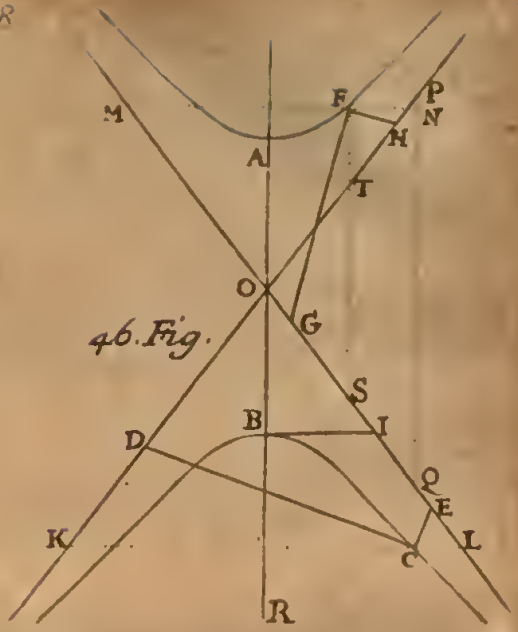


NANCY

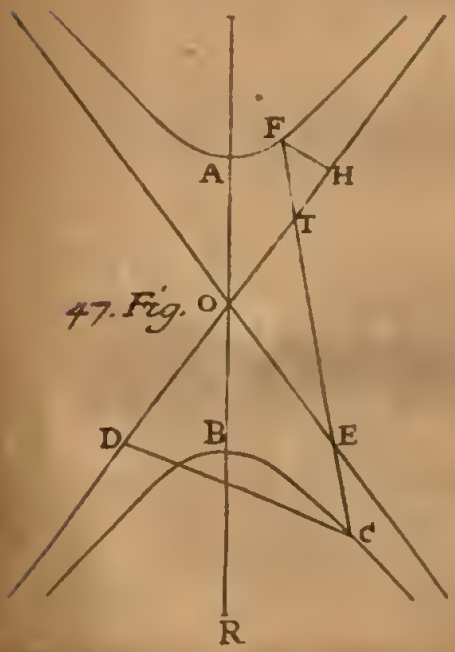
45. Fig.



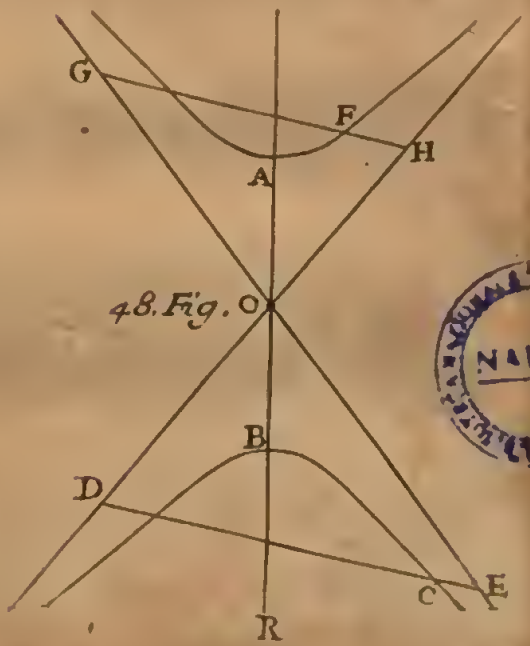
46. Fig.

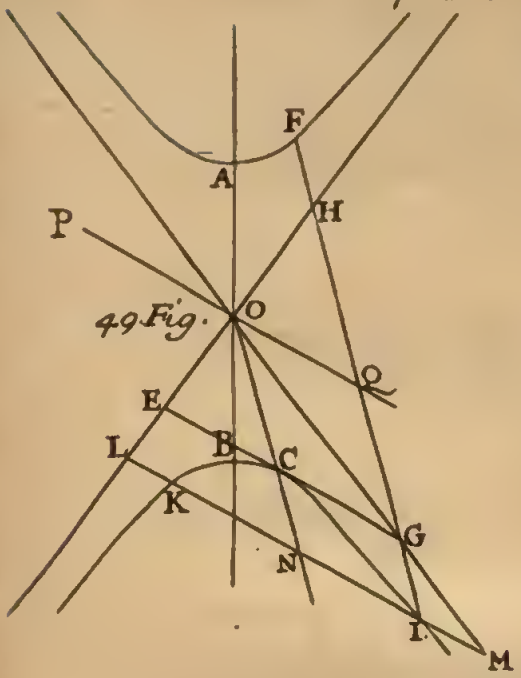


47. Fig.

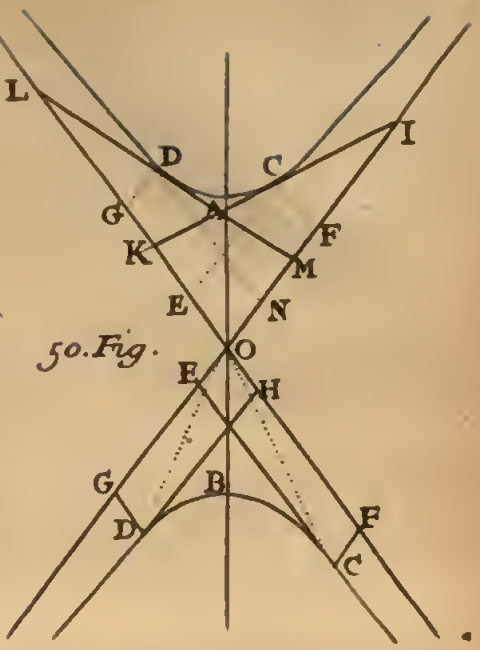


48. Fig.

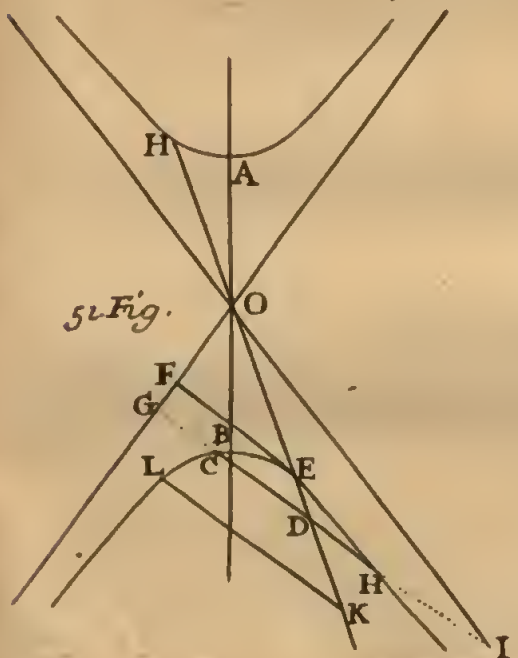




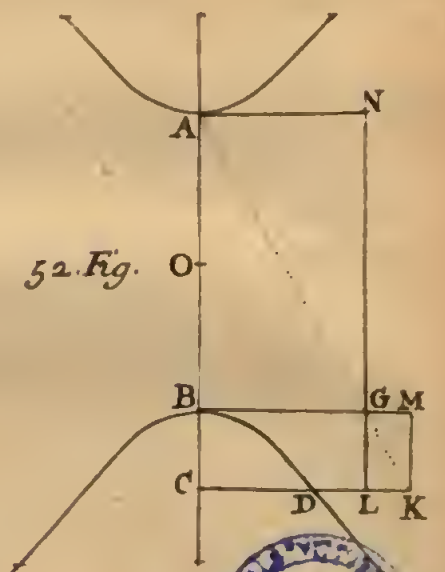
49. Fig.



50. Fig.

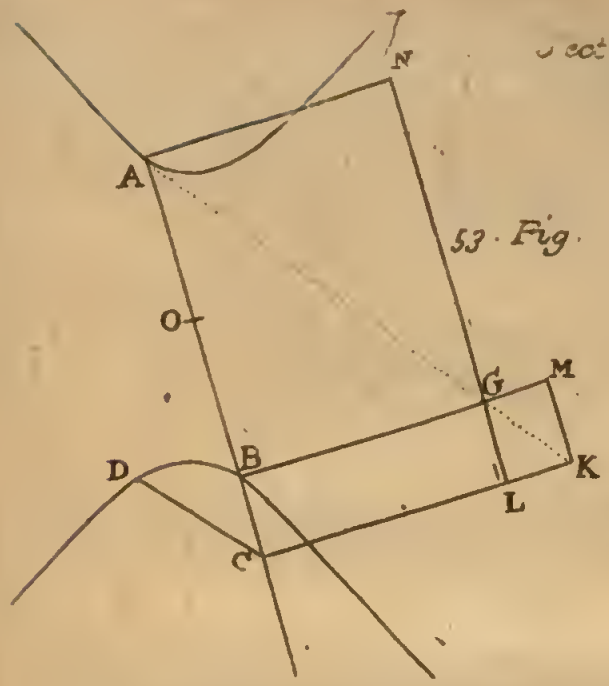


51. Fig.

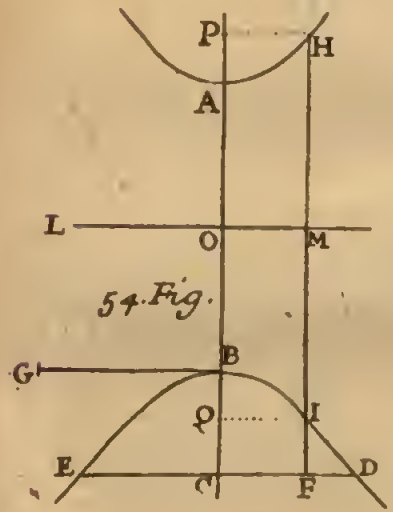


52. Fig.

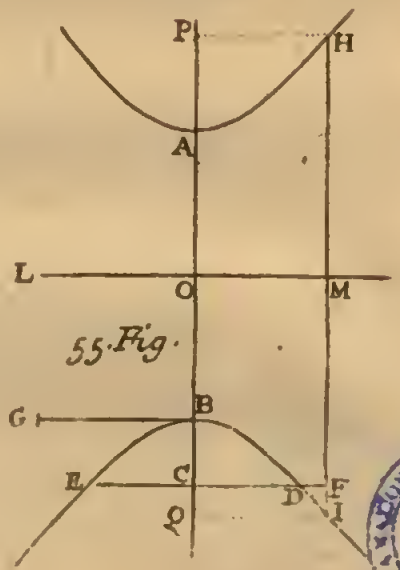
NANCY



53. Fig.

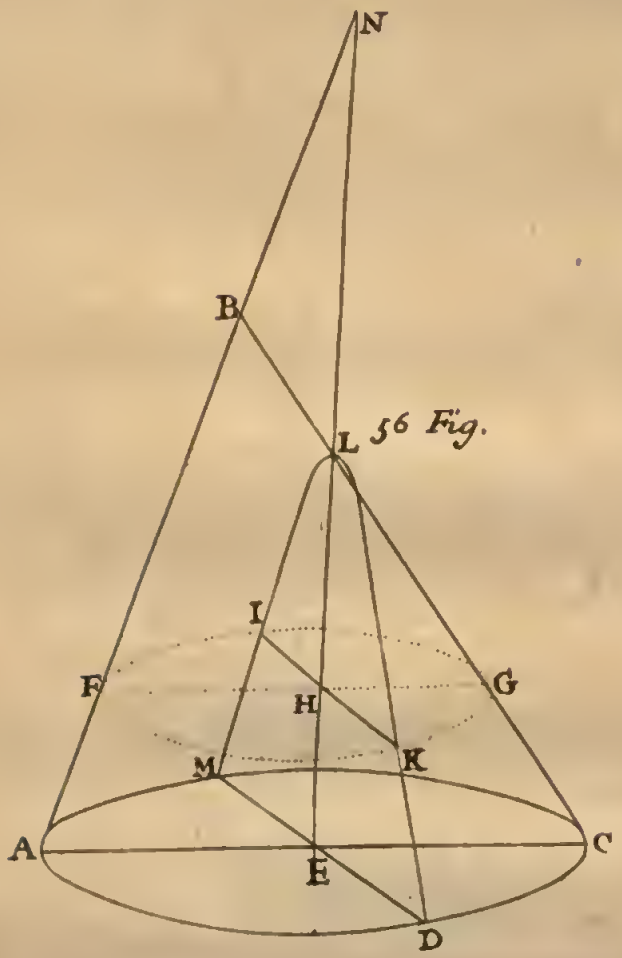


54. Fig.



55. Fig.

Sect. Con. p. 135.



56 Fig.

NAMUR

f09397

TRAITE'
DES LIEUX GEOMETRIQUES,
EXPLIQUEZ
Par une Méthode courte & facile.

Par M. OZANAM, Professeur en Mathematique.

A PARIS,
Chez ESTIENNE MICHALLET, ruë S. Jacques,
à l'Image S. Paul.

M. DC. LXXXVII.
AVEC PERMISSION.

AU LECTEUR.

Mon intention n'étoit pas, Mon cher Lecteur, *de vous donner ſi-tôt ce Traité des* Lieux Geometriques, *parce que je voulois voir auparavant, ſi le Traité precedent auroit le bonheur de vous plaire. Mais le Libraire m'ayant prié de ne pas differer davantage, pour ſatisfaire à pluſieurs Perſonnes curieuſes, qui luy demandoient avec empreſſement ce Traité, & encore le ſuivant ; cela m'a obligé de vous donner ces deux Traitez, tels que je les avois compoſez pour mon uſage, ſans les avoir augmentez que de quelques Queſtions au commencement de chaque Traite, pour vous mieux faire comprendre l'uſage des* Lieux Geometriques, *pour la ſolution des Problemes Geometriques, qui reçoivent une*

infinité de ſolutions , & qu'à cauſe de cela on nomme Indeterminez; *& l'utilité de la* Conſtruction des Equations , *pour reſoudre les Problemes Geometriques , qui n'ont qu'un certain nombre de ſolutions differentes , & que pour cela on appelle* Determinez.

TRAITE'
DES LIEUX GEOMETRIQUES.

LORS qu'aprés avoir accompli les conditions d'un Probleme, il demeure dans la derniere Equation plus d'une lettre inconnuë, le Probleme eſt un *Lieu;* & quand il ne reſte que deux lettres inconnuës, ce Lieu eſt une *Ligne*, qui ſera droite, lorſque dans l'Equation conſtitutive chaque lettre inconnuë n'aura qu'une dimenſion, & qu'elles ne ſe multiplieront point enſemble; & alors ce Lieu eſt appellé *Simple*, ou *à la Ligne droite*.

Mais, ſi l'une de ces deux lettres inconnuës a deux dimenſions, ou bien, quand leur Rectangle ſe trouve dans l'Equation conſtitutive, cette ligne locale eſt courbe, & elle eſt toûjours la circonference ou d'un *Cercle*, ou d'une *Ellipſe*, ou d'une *Parabole*, ou d'une *Hyperbole*. C'eſt ſelon la diſpoſition des deux lettres inconnuës dans l'Equation : car ſi le Quarré d'une

lettre inconnuë ſe trouve affirmé d'un côté de l'Equation, & reduit à l'unité, & que le Quarré de l'autre lettre inconnuë ſe trouve nié de l'autre côté, & pareillement reduit à l'unité, ſans que le Rectangle de ces deux mêmes lettres inconnuës ſe trouve dans l'Equation, cette ligne courbe ſera la circonference d'un *Cercle*, pour le moins lorſque les deux lettres inconnuës feront un Angle droit, & alors le Lieu ſe nomme *Plan*, ou *au Cercle*.

Lieu Plan.

Dans les autres cas cette ligne courbe peut être la circonference d'une *Ellipſe*, d'une *Parabole*, & d'une *Hyperbole*, & alors ce Lieu eſt appellé *Solide*.

Lieu Solide.

Mais, ſi dans l'Equation l'une des deux lettres inconnuës, ou toutes deux enſemble, ont trois ou quatre dimenſions, la ligne courbe qui determinera ce Lieu, qu'on appelle *Surſolide*, ſera une *Ligne du ſecond genre*. Et comme le nombre de ces lignes n'a pas encore été determiné, nous ne parlerons icy que des Lieux *Simples*, *Plans*, & *Solides*.

Lieu Surſolide.

Nous ajoûterons donc, que le Cercle ſe change en *Ellipſe*, lorſque les deux lettres inconnuës ne font pas un Angle droit, ou bien lorſque le Quarré de l'une n'eſt pas reduit à l'unité.

Lieu à l'Ellipſe.

Que ſi le Quarré de chaque lettre inconnuë ſe trouve affirmé; ou ſi au lieu du Quarré d'une lettre inconnuë il y a le Rectangle de ces deux lettres; ou bien encore ſi ce Rectangle ſe trouve ſeul égal à un autre Rectangle connu, le Lieu eſt une *Hyperbole*.

Lieu à l'Hyperbole.

Enfin, ſi ce Rectangle ne ſe trouve point dans l'Equation, & que le Quarré de l'une des lettres inconnuës s'y rencontre, le Lieu eſt une *Parabole*. Tout

Lieu à la Parabole.

cela se demontrera par ordre dans les Problemes suivans.

Mais, auparavant que de venir à la pratique, pour vous mieux faire comprendre ce que nous venons de dire, nous ajoûterons ici quelques Questions, dont la premiere vous fera connoître, qu'un Probleme est aussi un Lieu, bien que dans son Equation constitutive il ne demeure que l'une des deux lettres inconnuës, qui auront été introduites dans l'Analyse, & qui doivent toûjours faire en lignes un Angle donné, pourvû que l'autre lettre inconnuë n'ait pas été determinée, comme vous allez voir.

QUESTION I.

Trouver au dedans d'un Angle rectiligne donné, un point, duquel tirant aux deux lignes de cét Angle deux perpendiculaires, la somme de ces deux perpendiculaires soit égale à une ligne donnée. *Lieu à la ligne droite.*

ON donne l'Angle rectiligne BAC, *& il est proposé de trouver au dedans de cét Angle le point* D, *duquel tirant aux deux lignes* AB, AC, *les perpendiculaires* DB, DC, *leur somme* DB† DC, *soit égale à la ligne donnée* AE. 1. Fig.

Ayant tiré deux points E, C, *sur* AB, *les perpendiculaires* EF, CG, *& du point* D, *à la ligne* CG, *la perpendiculaire* DH, *comme si la Question étoit déja resoluë, supposez*

AE ∽ a.
EF ∽ b.
AF ∽ c.
CD ∽ x.
AC ∽ y.

Parce que l'Angle donné BAC, *eſt icy ſuppoſé aigu, les deux perpendiculaires* EF, CG, *tomberont au dedans du même Angle: & parce que les quatre lignes* AE, AF, CD, CH, *ſont proportionnelles, auſſi-bien que les quatre* AE, EF, CD, DH, *à cauſe des Triangles ſemblables* AEF, CDH, *on trouvera* CG ∽ $\frac{by}{a}$, *&* CH ∽ $\frac{cx}{a}$, *& par conſequent* GH, *ou* BD ∽ $\frac{by-cx}{a}$; *Et parce que l'on veut que la ſomme des deux lignes* DB, DC, *ſoit égale à la ligne donnée* AE, *on aura cette Equation* $x+\frac{by-cx}{a}$ ∽ a, *ou* x ∽ $\frac{aa-by}{a-c}$, *qui eſt un Lieu à la ligne droite, lequel étant reſolu par* Probl. I. *donne la conſtruction ſuivante.*

Conſtruction. *Ayant fait* EI ∽ AF, *tirez du point* I, *à la ligne* AC, *la perpendiculaire* IK ∽ EF. *Tirez du point* A, *à la meſme ligne* AC, *la perpendiculaire* AM, *troiſiéme proportionnelle aux deux lignes* AI, AE, *& menez par le point* M, *à la ligne* AK, *la parallele* MP, *dont la partie* OP, *compriſe entre les lignes de l'Angle donné* BAC, *ſera le Lieu qu'on cherche: de ſorte, que ſi l'on y prend un point à diſcretion, comme* D, *pour en tirer ſur les lignes* AB, AC, *les perpendiculaires* DB, DC, *leur ſomme* DB+DC, *ſera égale à la ligne donnée* AE.

I. Demonſtration. *Car, dans les Triangles ſemblables* AEF, CDH, *on a* AECH ∽ AFCD, *& dans les ſemblables* AEF, ACG, *on a* AECG ∽ ACEF: *c'eſt pourquoy on aura* AECG-AECH ∽ ACEF-AFCD; *& à cauſe de* CG-CH ∽ GH ∽ BD, *on aura* AEBD ∽ ACEF-AFCD.

Si

Si on prolonge la ligne DC, *juſqu'à ce qu'elle coupe la ligne* AK, *prolongée en* L, *les deux Triangles* AIK, ACL, *ſeront ſemblables, & l'on aura* AICL ∽ ACIK, *& à cauſe de* IK ∽ EF, *par la conſtruction, on aura* AICL ∽ ACEF; *& ôtant* AFCD, *on aura* AICL-AFCD ∽ ACEF-AFCD; *& ſi à la place de* ACEF-AFCD, *on met* AEBD, *qui luy eſt égal, par l'article precedent, on aura* AICL-AFCD ∽ AEBD; *& ſi à la place de* AI, *on met* AE-AF, *qui luy eſt égal, par la conſtruction, au lieu du Rectangle* AICL, *on aura* AECL-AFCL; *& au lieu de* AICL-AFCD, *on aura* AECL-AFCL-AFCD, *ou* AECL-AFDL, *ou* AECL-AFAM, *à cauſe de* CL†CD ∽ DL ∽ AM; *& enfin au lieu de* AICL-AFCD ∽ AEBD, *on aura* AECL-AFAM ∽ AEBD; *& par l'antitheſe, on aura* AECL-AEBD ∽ AFAM, *& par conſequent cette Analogie,* AE, AF:: AM, CL-BD; *& ſi au lieu de* AM, *on met ſon égale* DL, *ou* CD†CL, *on aura cette derniere Analogie,* AE, AF::CD†CL, CL-BD. 2. 3.

Si dans la premiere Analogie, AE, AF::AM, CL-BD, *on permute, on aura celle-cy,* AE, AM::AF, CL-BD; *& ſi aux deux premiers termes* AE, AM, *on donne la hauteur commune* AE, *on aura cette autre Analogie,* AEq, AEAM::AF, CL-BD; *& ſi à la place du Quarré* AE, *on met le Rectangle* AIAM, *qui luy eſt égal, à cauſe des trois proportionnelles* AI, AE, AM, *par la conſtruction, on aura cette autre Analogie,* AIAM, AEAM::AF, CL-BD; *& ſi au lieu des deux premiers termes* AIAM, AEAM, *dont la hauteur commune eſt* AM, *on met les baſes* AI, AE, *qui ſont en même raiſon, par* 1. 6. *on aura cette autre Analogie,* AI, AE::AF,

CL-BD; *& ſi au lieu du premier terme* AI, *on met* AE-AF, *qui luy eſt égal, par la conſtruction, & qu'on permute, on aura celle-cy,* AE-AF, AF:: AE, CL-BD; *& en compoſant, on aura celle-cy,* AE, AF:: AE†CL-BD, CL-BD; *& enfin, ſi à la place des deux premiers termes* AE, AF, *on met les deux* CD†CL, CL-BD, *qui ſont en même raiſon, par la derniere Analogie de l'article precedent, on aura cette derniere Analogie,* CD†CL, CL-BD:: AE†CL-BD, CL-BD, *& par conſequent* AE†CL-BD ∽ CD†CL; *& par l'antitheſe, on aura* AE ∽ BD†CD. *Ce qu'il faloit demontrer.*

COROLLAIRE.

IL *s'enſuit, que quand le point* D, *conviendra avec le point* O, *la ſeule perpendiculaire qui tombera du point* O, *ſur* AC, *ſera égale à la ligne* AE. *C'eſt pourquoy, ſi au lieu de* AM ∽ $\frac{AA}{AE}$, *on fait* AN ∽ AE, *& que par le point* N, *on tire à la ligne* AC, *la parallele* NO, *on aura le point* O. *Et pareillement, ſi l'on faiſoit* AQ, *perpendiculaire à* AB, *& égale à* AE, *& que par le point* Q, *on tirât à la ligne* AB, *la parallele* QP, *on auroit le point* P. *Mais, pour avoir le point* P, *il ſuffira de faire* AP ∽ AO. *D'où il ſuit, que le Triangle* AOP, *ſera toûjours iſoſcele, & que dans un Triangle iſoſcele, comme* AOP, *les deux perpendiculaires* DB, DC, *tirées du point* D, *pris à diſcretion ſur ſa baſe* OP, *ſont enſemble égales à une même ligne, telle qu'eſt ici la ligne donnée* AE, *laquelle eſt égale à la perpendiculaire, qui tomberoit de l'un des deux Angles* O, P, *ſur ſon côté oppoſé.*

SCOLIE.

SI *au lieu de prendre la ſomme* DB†DC, *on veut prendre la ſomme* CH†DH, *pour la rendre égale à la*

ligne donnée AE, *on trouvera* $x \sim \frac{aa}{b+c}$, *qui est un Lieu à la ligne droite, parce que la quantité* y, *qui entre dans la Question, n'est point determinée. Ce Lieu fait connoître que le point* D, *est dans une ligne droite indéfinie parallele à la ligne* AC, *& éloignée de la meſme ligne* AC, *d'une quantité égale à la fraction trouvé* $\frac{aa}{b+c}$. *De ſorte que la perpendiculaire* CD, *étant troiſiéme proportionnelle aux deux lignes* AF+EF, AE, *la ſomme* CH+DH, *ſera égale à la ligne donnée* AE.

Car, puiſque par la conſtruction, nous avons cette Analogie AF+EF, AE::AE, CD, *ſi à la place des deux premiers termes* AF+EF, AE, *on met les deux* CH+DH, CD, *qui ſont en meſme raiſon, à cauſe des Triangles ſemblables* AEF, CDH, *on aura cette autre Analogie,* CH+DH, CD::AE, CD, *& par conſequent* CH+DH ~ AE. *Ce qu'il faloit demontrer.* Demonſtration.

QUESTION II.

Touver deux Nombres, tels que la raiſon de leur difference à celles de leurs Quarrez, ſoit donnée. *Lieu à la ligne droite.* 2. 2. Dioph.

COMME *nôtre intention eſt de reſoudre cette Queſtion auſſi bien en Lignes qu'en Nombres, & qu'en Geometrie elle eſt mal proposée, nous la propoſerons plus generalement, en cette ſorte:* Trouver deux lignes, telles que le Plan ſous leur difference & une ligne donnée, ſoit à la difference de leurs Quarrez, en raiſon donnée.

On propoſe de trouver deux lignes AD ~ x, *&* DE ~ y, *telles que le Plan* lx-ly, *ſous la ligne donné* AO ~ l, *& leur difference* x-y, *ſoit à la difference* xx-yy, 2. Fig.

de leurs Quarrez, comme AP ∽ r, *à* AQ ∽ f.

Selon la condition de la Queſtion, on aura cette Analogie, lx-ly, xx-yy::r, f, *ou* l, x†y::r, f, *& par conſequent cette Equation,* lf ∽ rx†ry, *ou* y ∽ $\frac{lf}{r}$ - x, *qui eſt un Lieu à la ligne droite, lequel étant reſolu par* Probl. I. *donne la conſtruction ſuivante.*

Conſtruction. *Ayant fait à volonté l'Angle* BAC, *par les deux lignes* AB, AC, *dont chacune ſoit* $\frac{lf}{r}$, *ou quatriéme proportionnelle aux trois* AP, AQ, AO, *menez la droite* BC, *qui ſera le Lieu qu'on cherche : de ſorte, que ſi on y prend entre* B, *&* C, *un point à diſcretion, comme* E, *pour en tirer à la ligne* AC, *la parallele* DE, *les deux lignes* AD, DE, *ſeront celles qu'on cherche ; c'eſt-à-dire, que le Plan ſous la ligne donnée* AO, *& leur difference* AD-DE, *ſçavoir* AOAD-AODE, *ſera à la difference* ADq-DEq, *de leurs Quarrez, comme* AP, *à* AQ.

Demonſtration. *Car, puiſque nous avons* DB ∽ DE, *à cauſe de* AB ∽ AC, *par la conſtruction, & des deux Triangles ſemblables* BDC, BAC, *nous aurons* AB ∽ AD†DE, *à cauſe de* AB ∽ AD†DB, *& on pourra faire cette Analogie,* AO, AD†DE::AO, AB ; *& ſi à la place des deux derniers termes* AO, AB, *on met les deux* AP, AQ, *qui ſont en meſme raiſon, par la conſtruction, on aura celle-cy,* AO, AD†DE::AP, AQ ; *& ſi on donne aux deux premiers termes* AO, AD†DE, *la hauteur commune* AD-DE, *on aura cette derniere Analogie,* AOAD-AODE, ADq-DEq::AP, AQ. *Ce qu'il faloit demontrer.*

Quand on voudra reſoudre cette Queſtion en Nombres, il ſera plus élegant de mettre $\frac{a.b}{1}$, *pour les deux Nombres qu'on cherche, & ſelon la condition de la Queſtion, on*

aura cette Analogie, $\frac{a \cdot b}{x}, \frac{aa \cdot bb}{xx} :: r, f$, *ou* $x, a+b :: r, f$, *& par conſequent cette Equation,* $fx \backsim ar+br$, *dans laquelle on trouvera* $x \backsim \frac{ar+br}{f}$, *& les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels,*

$$\frac{af, bf}{ar+br}.$$

Si $r \backsim 1$, *&* $f \backsim 6$, *& qu'on ſuppoſe* $a \backsim 1$, *&* $b \backsim 2$; *les deux Nombres ſeront* 2, 4; *& ſi on ſuppoſe* $a \backsim 5$, *&* $b \backsim 1$, *les deux Nombres ſeront* 5, 1.

On tire de cette ſolution, le Canon ſuivant: Si on multiplie deux Nombres quelconques, chacun par le ſecond terme de la raiſon donnée, & qu'on diviſe chaque produit par le Plan ſous le premier terme & la ſomme des deux mêmes Nombres, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Comme cette Queſtion eſt indeterminée, on en peut donner autant de ſolutions indéfinies que l'on voudra, & en tirer autant de Canons differens: mais ce n'eſt pas icy le lieu d'en parler davantage.

QUESTION III.

Trouver deux Nombres, tels que la raiſon de leur ſomme à celle de leurs Quarrez, ſoit donnée.

Lieu au Cercle. 1. 2. Dioph.

POUR *reſoudre cette Queſtion par Geometrie, nous la propoſerons plus generalement en cette ſorte:* Trouver deux lignes, telles que le Plan ſous leur ſomme & une ligne donnée, ſoit à la ſomme de leurs Quarrez, en raiſon donnée.

On propoſe de trouver deux lignes HC $\backsim x$, *&* HE $\backsim y$, 3. Fig.

3. Fig. *telles que le Plan* $lx+ly$, *ſous la ligne donnée* AO $\backsim l$, *& leur ſomme* $x+y$, *ſoit à la ſomme* $xx+yy$ *de leurs Quarrez, comme* AP $\backsim r$, *à* AQ $\backsim f$.

Selon la condition de la Queſtion, on aura cette Analogie, $lx+ly, xx+yy :: r, f$, *& par conſequent cette Equation* $lfx+lfy \backsim rxx+ryy$, *ou* $xx-\frac{lfx}{r} \backsim \frac{lfy}{r}-yy$, *qui eſt un Lieu à un Cercle donné, dont le rayon eſt* $\sqrt{\frac{llff}{rrrr}+\frac{lfy}{rr}}$, *comme l'on connoît en ôtant les ſeconds termes, ſçavoir en ſuppoſant* $x \backsim o+\frac{lf}{2rr}$, *&* $y \backsim z+\frac{lf}{2rr}$, *pour avoir cét autre Lieu au Cercle,* $zz \backsim \frac{llff}{4rrrr}-\omega\omega$, *lequel étant reſolu par les preceptes du* Probl. II. *donne la conſtruction ſuivante.*

Conſtruction. *Ayant fait le Triangle iſoſcele rectangle* ABC, *dont chacun des côtez* AB, BC, *ſoit* $\frac{lf}{r}$, *ou quatriéme proportionnel aux trois lignes* 2 AP, AO, AQ, *décrivez du centre* A, *par le point* C, *une circonference de Cercle, qui ſera le Lieu qu'on cherche: & pour y determiner en lignes les deux nombres qu'on cherche, tirez le Diametre* FG, *parallele au côté* BC, *& prenez ſur ce Diametre* FG, *un point quelconque* D, *par où vous tirerez au meſme Diametre* FG, *la perpendiculaire* EH, *qui ſera terminée d'un côté en* E, *par la circonference du Cercle, & de l'autre côté en* H, *par la ligne* BC, *prolongée quand il en ſera beſoin; & les lignes* EH, CH, *repreſenteront les deux nombres qu'on cherche, en prenant la lettre* l, *ou la ligne* AO, *pour l'unité: de ſorte que le Plan* AOEH+AOCH, *ſous leur ſomme* EH+CH, *& la ligne donnée* AO, *ſera à la ſomme* EHq+CHq, *de leurs Quarrez, comme* AP, *à* AQ.

Demonſtration. *Pour la demonſtration, prolongez les lignes* EH, CH, *juſqu'à la circonference du Cercle en* I, *& en* L, *& tirez par le point* C, *à la ligne* HI, *la parallele* CN, *& par le point* N, *où elle coupe la circonference du Cercle, &*

par le Centre A, *à la ligne* LC, *les paralleles* MN, FG.

Cette preparation étant faite, on conſiderera que la ligne HI, *eſt égale à* EH-CL. *Car ſi des deux lignes égales* DE, DI, *on oſte les deux égales* TC, TN, *ou* DH, DM, *il reſtera* HI ∽ EM; *& à cauſe de* EM ∽ EH-HM, *on aura* HI ∽ EH-HM; *& à cauſe de* HM ∽ 2DH, *on aura* HI ∽ EH-2DH; *& encore à cauſe de* DH ∽ AB, *& de* AB ∽ BC, *on aura* HI ∽ EH-2BC; *& enfin à cauſe de* 2BC ∽ CL, *on aura* HI ∽ EH-CL. *Ce qu'il faloit demontrer.*

Cela étant ſuppoſé, puiſqu'on a HI ∽ EH-CL, *on pourra faire ceſte Analogie,* LH, HI :: LH, EH-CL; *& ſi à la place des deux premiers termes* LH, HI, *on met les deux* EH, CH, *qui ſont en meſme raiſon, par la nature du Cercle, on aura cette autre Analogie,* EH, CH :: LH, EH-CL, *& par conſequent cette Equation,* EHq-CLEH ∽ CHLH, *ou* EHq-CLEH ∽ CLCH-CHq, *à cauſe de* LH ∽ CL-CH, *& par l'antitheſe on aura celle-cy,* CLEH + CLCH ∽ EHq + CHq, *ou* 2ABEH + 2ABCH ∽ EHq + CHq, *à cauſe de* CL ∽ 2AB; *& donnant à chaque Plan la hauteur commune* AP, *on aura* 2ABAPEH + 2ABAPCH ∽ APEHq + APCHq; *& ſi à la place de* 2ABAP, *on met* AOAQ, *qui luy eſt égal, à cauſe des quatre proportionnelles* 2AP, AO, AQ, AB, *par la conſtruction, on aura cette derniere Equation,* AOAQEH + AOAQCH ∽ APEHq + APCHq, *& par conſequent cette Analogie,* AOEH + AOCH, EHq + CHq :: AP, AQ. *Ce qu'il faloit demontrer.*

Pour reſoudre cette Queſtion en nombres, on pourra ſe ſervir de l'Equation precedente, lſx + lſy ∽ rxx + ryy,

dans laquelle on trouvera $y \backsim \frac{1f}{2r} + \sqrt{\frac{11ff}{4rr} + \frac{1fz}{r} - xx}$: *& pour avoir une ſolution rationnelle, il faudra égaler au Quarré cette Puiſſance,* $\frac{11ff}{4rr} + \frac{1fz}{r} - xx$, *pour le côté duquel prenant* $\frac{ax}{b} - \frac{1f}{2r}$, *pour avoir une ſolution indéfinie autant generale qu'il eſt poſſible, on trouvera* $x \backsim \frac{fab + fbb}{raa + rbb}$, *& par conſequent* $y \backsim \frac{fab + faa}{raa + rbb}$. *Ainſi les deux Nombres qu'on cherche, ſeront tels,*

$$\frac{fbb + fab \cdot faa + fab}{raa + rbb}.$$

Si $r \backsim 1$, *&* $f \backsim 10$, *& qu'on ſuppoſe* $a \backsim 1$, *&* $b \backsim 2$, *les deux Nombres qu'on cherche, ſeront* 12, 6. *mais ſi l'on ſuppoſe* $a \backsim 3$, *&* $b \backsim 1$, *les deux Nombres ſeront* 4, 12.

Nous avons reſolu cette Queſtion dans nôtre Diophante en pluſieurs manieres differentes, mais ce n'eſt pas icy le lieu d'en parler davantage. Je diray ſeulement que de cette ſolution indéfinie on tire le Canon ſuivant.

Si on multiplie le Plan ſous la ſomme de deux Nombres quelconques & le ſecond terme de la raiſon donnée, par chacun de ces deux mêmes Nombres, & qu'on diviſe chaque ſolide par le ſolide ſous le premier terme & la ſomme des Quarrez des deux mêmes Nombres, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

QUESTION IV.

Lieu à la Parabole.

Trouver un Triangle rectangle, dont l'hypotenuſe ſoit moyenne proportionnelle entre un côté & ce même côté augmenté d'une ligne donnée.

4. Fig.

ON propoſe de trouver le Triangle rectangle ABE, *dont l'hypotenuſe* AB, *ſoit moyenne proportionnelle entre*

entre le côté AE, *& le même côté* AE, *augmenté de la Ligne donnée* AD. 4. Fig.

Si l'on suppose AD ∽ *a.*

BE ∽ *x.*

AE ∽ *y.*

on aura ABq ∽ xx † yy, *&* DE ∽ a † y, *& parce que l'on veut que l'Hypotenuse* AB *soit moyenne proportionnelle entre* AE, DE, *le Quarré* AB, *ou* xx † yy *sera égal au Rectangle* DEA, *ou* ay † yy. *Ainsi on aura cette Equation* xx † yy ∽ ay † yy, *ou* xx ∽ ay, *qui est un Lieu à une Parabole donnée, dont le Parametre est* a, *ou* AD, *comme l'on connoît par* Probl. IV. *d'où nous avons tiré cette construction.*

Construction. *Ayant prolongé la Ligne donnée* AB, *indefiniment vers* E, *décrivez par son extremité* A, *sur l'axe* AE, *la Parabole* BAF, *dont le Parametre soit égal à la Ligne donnée* AD, *& cette Parabole ainsi décrite sera le Lieu qu'on cherche : de sorte que si l'on prend sur sa circonference un point à volonté, comme* B, *pour en tirer sur l'axe* AE, *la perpendiculaire* BE, *le Triangle* ABE, *sera tel que son Hypotenuse* AE *sera moyenne proportionnelle entre* AE, DE.

Demonstration. *Car à cause de* ABq ∽ BEq † AEq, *par* 47. 1. *& de* BEq ∽ DAE, *par la proprieté de la Parabole, on aura* ABq ∽ DAE † AEq, *& à cause de* DAE † AEq ∽ DEA, *par* 3. 2. *on aura* ABq ∽ DEA, *& par consequent cette analogie,* DE, AB :: AB, AE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Lieu à l'Hyperbole.

QUESTION V.

3. 4. D. oph

Trouver deux Nombres, dont la difference ſoit à leur produit en raiſon donnée.

POur reſoudre cette Queſtion par Geometrie, nous la propoſerons plus generalement en cette ſorte: Trouver deux Lignes, telles que le Plan ſous leur difference & une Ligne donnée, ſoit à leur Rectangle en raiſon donnée.

1. Fig. *On propoſe de trouver deux Lignes* LI ∽ x, LE ∽ y, *telles que le Plan* APLI-APLE, *ſous leur difference* LI-LE, *& la Ligne donnée* AP ∽ l, *ſoit à leur Rectangle* ELI, *comme* AO ∽ r, *à* AQ ∽ ſ.

Selon la condition de la Queſtion, on aura cette analogie, lx-ly, xy :: r, ſ, *& par conſequent cette Equation* lſx-lſy ∽ rxy, *qui eſt un Lieu à l'Hyperbole entre ſes aſymptotes, où le Rectangle commun eſt* $\frac{l}{r}$, *comme l'on connoît par* Probl. V. *D'où nous avons tiré cette conſtruction.*

Conſtruction. *Ayant fait un angle quelconque* BAC, *& ayant pris ſur l'une des deux Lignes* AB, AC, *comme ſur* AC, *la Ligne* AD ∽ $\frac{lſ}{r}$, *ou quatriéme proportionnelle aux trois Lignes* AO, AQ, AP, *tirez par le point* D, *à l'autre Ligne* AB, *la Parallele* DE ∽ AD, *& décrivez du centre* A, *par le point* E, *entre les aſymptotes* AB, AC, *l'Hyperbole* FEG, *qui ſera le Lieu qu'on cherche: de ſorte que ſi l'on prend ſur l'aſymptote* AC, *depuis* D *vers* C, *un point à volonté comme* K, *& que par le point* K, *on tire à l'autre aſymptote* AB, *la parallele* KI, *& par le point* I, *à l'aſymptote* AC, *la*

parallele HI, *les deux Lignes* LE, LI, *repreſenteront les deux Nombres qu'on cherche, c'eſt à-dire que le Rectangle* APLI-APLE, *ſera au Rectangle* ELI, *comme* AO, *à* AQ. 1. Fig.

Car puiſque par la Nature de l'Hyperbole, on a cette analogie, AK, AD :: DE, KI, *ou* AK, AD :: AD, KI, *à cauſe de* DE ∽ AD, *par la conſtruction, en diviſant on aura celle cy*, DK, AD :: AD-KI, KI, *ou* LI, AD :: LE, KI, *& en permutant on aura celle-cy*, LI, LE :: AD, KI, *& en diviſant on aura celle-cy*, LI, LI-LE :: AD, AD-KI, *ou* LI, LI-LE :: AD, LE, *& par conſequent* ADLI-ADLE ∽ ELI. *C'eſt pourquoy on pourra faire cette analogie*, ADLI-ADLE, ADq :: ELI, ADq, *& ſi à la place des deux premiers termes* ADLI-ADLE, ADq, *dont la hauteur commune eſt* AD, *on met leurs baſes* LI-LE, AD, *qui ſont en même raiſon, par* 1. 6. *on aura cette autre analogie*, LI-LE, AD :: ELI, ADq, *& donnant aux deux premiers termes* LI-LE, AD, *la hauteur commune* AP, *on aura celle-cy*; APLI-APLE, APAD :: ELI, ADq, *& en permutant on aura celle-cy*, APLI-APLE, ELI :: APAD, ADq, *& à cauſe de la hauteur* AD, *qui eſt commune aux deux derniers termes* APAD, ADq, *on aura celle-cy*, APLI-APLE, ELI :: AP, AD, *& ſi au lieu des deux derniers termes* AP, AD, *on met les deux* AO, AQ, *qui ſont en même raiſon, par la conſtruction, on aura cette derniere analogie*, APLI-APLE, ELI :: AO, AQ. *Ce qu'il faloit démontrer.* Demonſtration.

Nous avons donné dans nôtre Diophante pluſieurs ſolutions de cette Queſtion en nombres, entre leſquelles

5. Fig. *la ſolution ſuivante eſt la plus ſimple & la plus générale de toutes.*

$\frac{2bf}{a1-br}$, $\frac{2bf}{af+b1}$.

Si r ∽ 1, & f ∽ 6, & *que l'on ſuppoſe* a ∽ 1, & b ∽ 2, *les deux Nombres qu'on cherche, ſeront* 6, 3. & *ſi l'on ſuppoſe* a ∽ 1, & b ∽ 3, *les deux Nombres ſeront* 12, 4. *Ainſi des autres, pourvû que* b *ſoit moindre que* $\frac{af}{1}$.

QUESTION VI.

Lieu à l'Ellipſe. Décrire ſur une baſe donnée un Triangle, tel que la ſomme des Quarrez de ſes deux côtez ſoit égale à la ſomme des Quarrez de la baſe donnée & de ſa perpendiculaire, qui tombe de l'angle oppoſé.

6. Fig. *ON propoſe de décrire ſur la baſe donnée* AB, *le Triangle* ABC, *en ſorte que la ſomme des Quarrez des deux côtez* AC, BC, *ſoit égale à la ſomme du Quarré de la baſe donnée* AB, & *du Quarré de ſa perpendiculaire* CD.

Si l'on ſuppoſe... AB ∽ *a*.
CD ∽ *x*.
AD ∽ *y*.

On aura BD ∽ *a* − *y*.
ACq ∽ *xx* + *yy*.
BCq ∽ *xx* + *yy* − 2*ay* + *aa*.

& *parce que l'on veut que la ſomme des Quarrez* CA, CB, *ſoit égale à celle des Quarrez* AB, CD, *on aura cette Equation*, 2xx + 2yy − 2ay + aa ∽ xx + aa, *ou* yy − ay ∽ $-\frac{1}{2}$xx, *qui eſt un Lieu à une Ellipſe donnée, dont un Diametre eſt* a, & *ſon Parametre eſt*

2a, *c'eſt pourquoy le ſecond Diametre ſera* R 2aa, *comme l'on connoît par* Probl. III. *d'où nous avons tiré cette conſtruction.* 6. Fig.

Tirez par le point E, *milieu de la baſe donnée* AB, *à la même Ligne* AB, *la perpendiculaire* FG, *dont la longueur ſe terminera en cette ſorte. Ayant pris ſur la perpendiculaire* FG, *les deux Lignes* EH, EI, *égales chacune à* AE, *ou à* BE, *menez la droite* AI, *& faites les Lignes* EF, EG, *égales chacune à cette droite* AI, *pour décrire des deux Foyers* H, I, *à l'entour des deux axes* AB, FG, *une Ellipſe, qui ſera le Lieu qu'on cherche: de ſorte que ſi on prend ſur ſa circonference un point à volonté, comme* C, *pour le ſommet du Triangle* ABC, *ce Triangle* ABC, *ſatisfera à la Queſtion, c'eſt à-dire que ſi du point* C, *on tire ſur la baſe* AB, *la perpendiculaire* CD, *la ſomme* ACq † BCq *ſera égale à la ſomme* ABq † CDq. Conſtruction.

Car puiſque le Parametre de l'Ellipſe eſt double de ſon Diametre AB, *par la conſtruction on aura* 2ADB ∽ CDq, *par la Nature de l'Ellipſe, & ajoûtant* ADq, *&* BDq, *on aura ces deux Equations,* 2ADB † ADq ∽ ACq, *&* 2ADB † BDq ∽ BCq, *dont la ſomme donnera cette troiſiéme Equation,* 2ADB † ADq † 2ADB † BDq ∽ ACq † BCq, *& à cauſe de* 2ADB ∽ CDq, *comme il a eſté démontré, & de* ADq † 2ADB † BDq ∽ ABq, *par* 4. 2. *on aura* CDq † ABq ∽ ACq † BCq. *Ce qu'il faloit démontrer.* Demonſtration.

PROBLEME I.

Conſtruire un Lieu à la Ligne droite.

LEs Equations qui donnent des Lieux *ſimples*, ou des Lieux *à la Ligne droite*, ſe peuvent toutes reduire à l'une des quatre formules ſuivantes;

$$y \backsim \tfrac{ax}{b}.$$
$$y \backsim \tfrac{ax}{b} + c.$$
$$y \backsim \tfrac{ax}{b} - c.$$
$$y \backsim c - \tfrac{ax}{b}.$$

Premiere Equation. 7. Fig.

Pour conſtruire le Lieu de la premiere Equation, $y \backsim \frac{ax}{b}$, ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indeterminée AB $\backsim x$, & que l'angle des deux Lignes inconnuës, x, y, ſoit égal au donné CAD. Suppoſons encore que de l'extremité B, de la Ligne indeterminée AB $\backsim x$, il parte la Ligne indefinie BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit égal au donné CAD. Cette Ligne BE $\backsim y$ ſera terminée en E, de quelque grandeur que ſoit la Ligne AB $\backsim x$, par la Ligne Locale AG, qu'on tirera en cette ſorte.

A cauſe de la fraction $\frac{ax}{b} \backsim y$, on a cette analogie, $b, a :: x, y$, qui fait connoiſtre que les quatre Lignes b, a, x, y, ſont les côtez homologues de deux Triangles ſemblables, & que par conſequent l'angle des deux premieres b, a, eſt égal à celuy des deux dernieres x, y; Si donc on prend ſur la Ligne indefinie AB $\backsim x$, la Ligne AF $\backsim b$, & que par le point F, on tire à la Ligne AD, la parallele FG $\backsim a$, la droite AG ſera le Lieu de la premiere Equation $y \backsim \frac{ax}{b}$. Conſtruction. 7. Fig.

Car ſi ſur cette Ligne AG, on prend tel point que l'on voudra, entre A, & G, ou audelà de G, comme E, & que par ce point E on tire à la Ligne AD, la parallele EB, en ſuppoſant AB $\backsim x$, & EB $\backsim y$, on aura dans les deux Triangles ſemblables, ABE, AFG, cette analogie, AB, BE :: AF, FG, ou $x, y :: b, a$, & par conſequent cette Equation, $ax \backsim by$, ou $y \backsim \frac{bx}{a}$, qui eſt la même que la propoſée. Demonſtration.

Pour conſtruire le Lieu de la deuxiéme Equation, $y \backsim \frac{ax}{b} + c$, ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indeterminée AB $\backsim x$, & que l'angle des deux Lignes inconnuës x, y, ſoit égal au donné CAD. Suppoſons encore que de l'extremité B de la Ligne indeterminée AB $\backsim x$, il parte la Ligne indeterminée BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit égal au donné CAD. Cette Ligne BE $\backsim y$, ſera terminée en E par la Ligne Locale HK, que l'on tirera en cette ſorte. Deuxiéme Equation. 8. Fig.

Si l'on ſuppoſe la fraction $\frac{ax}{b} \backsim z$, on aura cette analogie, $b, a :: x, z$, qui fait connoître que les quatre Lignes $b, a : x, z$, ſont les côtez homologues de deux Triangles ſemblables, & que par con- Conſtruction.

8. Fig. ſequent l'angle des deux premieres b, a, eſt égal à celuy des deux dernieres x, z. Si donc on prend ſur la Ligne indefinie AB $\backsim x$, la Ligne AF $\backsim b$, & que par le point F, on tire à la Ligne AD, la parallele FG $\backsim a$, en joignant la droite AG, on aura ſur la Ligne BE, la Ligne BI $\backsim z \backsim \frac{ax}{b}$, à laquelle on doit ajoûter la Ligne IE $\backsim c$, parce que dans l'Equation il y a $\frac{ax}{b} + c$, mais comme le point B n'eſt pas determiné, recourons au point fixe A, & prenons ſur la Ligne AD, la Ligne AH $\backsim c$, & tirons par le point H, à la Ligne AG, la parallele HK, qui ſera le Lieu qu'on cherche, & la demonſtration s'en fera comme auparavant.

Troiſiéme Equation. Pour conſtruire le Lieu de la troiſiéme Equation, $y \backsim \frac{ax}{b} - c$, on fera une conſtruction ſemblable à la precedente, excepté qu'il faut ôter de la Ligne BI $\backsim \frac{ax}{b}$,

9. Fig. la Ligne IE $\backsim c$, à cauſe de $\frac{ax}{b} - c$, c'eſt-à-dire qu'il faut prendre ſur la Ligne AD prolongée en bas, la Ligne AH $\backsim c$, & la Ligne LK ſera le Lieu qu'on cherche, & la démonſtration s'en fera de la même façon.

Quatriéme Equation. Pour conſtruire le Lieu de la quatriéme Equation, $y \backsim c - \frac{ax}{b}$, on fera une conſtruction ſemblable à la precedente, excepté qu'il faut ôter de la Ligne IE $\backsim c$,

10. Fig. la Ligne BI $\backsim \frac{ax}{b}$, à cauſe de $c - \frac{ax}{b}$, c'eſt-à-dire qu'il faut tirer en bas au deſſous de la Ligne AB $\backsim x$, la Ligne BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE des deux Lignes indeterminées ſoit égal au complement à 180 degrez de l'angle donné CAD, & la Ligne HL ſera le Lieu qu'on cherche, & la démonſtration s'en fera de la même façon.

PROBLEME II.

PROBLEME II.

Conſtruire un Lieu au Cercle.

Comme les Equations qui donnent des Lieux au Cercle, peuvent arriver en pluſieurs maniéres differentes, & qu'il ſeroit trop long de les rapporter icy toutes, nous donnerons ſeulement icy quelques exemples, qui pourront ſervir à proportion pour la ſolution des autres, en commençant par les plus ſimples.

Premier Exemple.

Propoſons donc premierement ce Lieu au Cercle, $yy \backsim aa - xx$. Puiſque $aa - xx$ eſt la difference de deux Quarrez, elle eſt produite par la ſomme $a + x$, & par la difference $a - x$ de leurs côtez : & puiſque le Rectangle ſous $a + x$ & $a - x$, ſçavoir $aa - xx$, eſt égal au Quarré yy, on doit conſiderer la quantité inconuë y, comme une ordonnée au Diamétre d'un Cercle, dont le rayon ou demy Diametre eſt a : & puiſque $a + x$, $a - x$, ſont des Lignes, la quantité inconnuë x, doit être en ligne droite avec la connuë a, & elle doit repreſenter la partie du Diametre compriſe entre le centre & l'ordonnée.

Conſtruction. 11. Fig.

C'eſt pourquoy ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indeterminée AB $\backsim x$, & que de ſon extremité B, il parte la Ligne indefinie BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit droit, car s'il n'étoit pas droit, au lieu d'un *Cercle* on auroit une *Ellipſe*. Parce que la Ligne AB $\backsim x$, n'eſt pas ſi grande que le rayon AC $\backsim a$, à cauſe de $a - x$, prenez ſur cette même Ligne AB $\backsim x$, prolongée, d'un côté la Ligne AC $\backsim a$, & de l'autre côté la Ligne AD $\backsim a$, pour avoir BC $\backsim$

11. Fig. $a-x$, & DB $\backsim a+x$, & parce que le Rectangle DBC, ou $aa-xx$, eſt égal au Quarré yy, on connoît que la quantité inconnuë y, eſt moyenne proportionnelle entre DB, BC, ou entre $a+x$, $a-x$. Ainſi la perpendiculaire BE, doit être priſe pour l'indeterminée y, & elle ſera terminée en E, par la circonference d'un Cercle décrit du centre A, par les extremitez C, D, du Diametre CD. Ainſi cette circonference ſera le Lieu de l'Equation propoſée, $yy \backsim aa-xx$.

Demonſtration. Car ſi l'on prend ſur cette circonference un point tel que l'on voudra, comme E, & que l'on en tire ſur le Diametre BC, la perpendiculaire EB, comme nous avons ſuppoſé AD, ou AC $\backsim a$, ſi l'on ſuppoſe AB $\backsim x$, & BE $\backsim y$, on aura DB $\backsim a+x$, & BC $\backsim a-x$, & parce que le Rectangle DBC eſt égal au Quarré BE, par la proprieté du Cercle, on aura cette Equation, $yy \backsim aa-xx$, qui eſt la même que la propoſée.

Second Exemple. Propoſons maintenant ce Lieu au Cercle, $yy \backsim bx-xx$, ou $xx-bx \backsim -yy$. Il en faut premierement ôter le ſecond terme, pour la rendre de même forme que la precedente, en ſuppoſant $x \backsim z+\frac{1}{2}b$, & vous aurez cet autre Lieu au Cercle, $zz \backsim \frac{1}{4}bb-yy$, duquel on tirera aiſément une conſtruction par un raiſonnement ſemblable au precedent. C'eſt pourquoy il ſuffit de regarder la Figure, & icy les noms de chaque Ligne, 12. Fig. qui ſerviront tant pour la conſtruction que pour la démonſtration.

AB $\backsim x$.
BE $\backsim y$.
AD $\backsim b$.

AC ∽ $\frac{1}{2}b$ ∽ CD. 12. Fig.

BD ∽ $b-x$.

BC ∽ z ∽ $x-\frac{1}{2}b$.

Propoſons encore ce Lieu au Cercle, $yy-by$ ∽ $cx-xx$. Il en faut premierement ôter les ſeconds termes, en ſuppoſant y ∽ $z+\frac{1}{2}b$, & x ∽ $\omega+\frac{1}{2}c$ pour avoir cet autre Lieu au Cercle, zz ∽ $\frac{bb+cc}{4}-\omega\omega$, ou zz ∽ $mm-\omega\omega$, en ſuppoſant $\frac{bb+cc}{4}$ ∽ mm, duquel on tirera aiſément une conſtruction à l'imitation de la precedente. C'eſt pourquoy il vous ſuffira de regarder la Figure, & icy les noms de chaque Ligne. Troiſiéme Exemple. 13. Fig.

AB ∽ x.

BE ∽ y.

DF ∽ $\frac{1}{2}b$.

AD ∽ $\frac{1}{2}c$.

AC ∽ c.

AF ∽ m ∽ $\frac{1}{2}$R.$bb+cc$.

BC ∽ $c-x$.

EI ∽ $y-\frac{1}{2}b$ ∽ z.

FI ∽ $x-\frac{1}{2}c$ ∽ ω.

BC ∽ $y-b$.

PROBLEME III.

Conſtruire un Lieu à l'Ellipſe.

Comme les Equations qui donnent des Lieux à l'Ellipſe, peuvent arriver en pluſieurs maniéres differentes, & qu'il ſeroit trop long de les expliquer icy toutes, nous donnerons ſeulement quelques exemples des cas les plus difficiles, en commençant par les plus faciles, pour pouvoir à leur imitation reſoudre les autres.

Premier Exemple. Proposons donc premierement ce Lieu à l'Ellipse ; $xx \backsim aa - \frac{byy}{c}$. Pour construire cette Ellipse, vous considererez que la nature d'une Ellipse étant telle, que le Diametre est à son Parametre, comme le Rectangle sous les parties du même Diametre est au Quarré de l'ordonnée correspondante, & que reduisant l'Equation proposée, $xx \backsim aa - \frac{byy}{c}$, en proportion on a cette analogie, $b, c :: aa - xx, yy$, on doit considerer les quantitez b, c, comme deux termes homologues au Diametre & à son Parametre, & alors le Rectangle $aa - xx$, dont les côtez sont $a + x, a - x$, sera le Rectangle des deux parties du Diametre, lesquelles par consequent seront $a + x, a - x$, & le côté y du Quarré yy sera l'ordonnée correspondante à ces deux parties. C'est pourquoy il faut comme dans le Cercle, que le demy Diametre soit a, & que sa partie comprise entre le centre & l'ordonnée soit x.

Construction. 14. Fig. Supposons donc que du point fixe A il parte la Ligne indeterminée AB $\backsim x$, & parce que cette Ligne n'est pas si grande que le demy Diametre a, à cause du côté precedent $a - x$, prenez sur cette même Ligne AB $\backsim x$, prolongée de côté & d'autre les Lignes AC, AD, égales chacune à la quantité connuë a, pour avoir BC $\backsim a - x$, & DB $\backsim a + x$. Et parce que les deux quantitez inconnuës x, y, doivent faire un angle donné, supposons que de l'extremité B, de la Ligne indefinie AB $\backsim x$, il parte la Ligne indeterminée, BE $\backsim y$, en sorte que l'angle ABE soit égal au donné. Aprés cela décrivez du centre A, à l'entour du Diametre CD, une Ellipse, dont le Diametre CD soit à son Parametre CG, comme b à c, & dont

lés ordonnées au même Diametre CD, ſoient paralleles à la Ligne BE, & cette Ellipſe ainſi décrite ſera le Lieu de l'Equation propoſée $xx \backsim aa - \frac{byy}{c}$. 14. Fig.

Car ſi l'on prend ſur la circonference de cette Ellipſe un point à volonté, comme E, & qu'on en tire au Diametre CD, l'ordonnée EB, comme nous avons fait AC $\backsim a$, & AD $\backsim a$, ſi l'on ſuppoſe AB $\backsim x$, & BE $\backsim y$, on aura BD $\backsim a + x$, & BC $\backsim a - x$, & parce que le Diametre CD eſt à ſon Parametre CG, comme b à c, par la conſtruction, & que cette raiſon eſt égale à celle du Rectangle DBC, au Quarré BE, c'eſt-à-dire à celle du Rectangle $aa - xx$, au Quarré yy, par la nature de l'Ellipſe, on aura cette analogie, b, $c :: aa - xx, yy$, & conſequemment cette Equation, $byy \backsim aac - cxx$, ou $xx \backsim aa - \frac{byy}{c}$, qui eſt la même que la propoſée. Demonſtration.

Propoſons ce Lieu à l'Ellipſe $xx + dx \backsim aa - \frac{byy}{c}$. Il le faut premierement reduire à un de même forme que le precedent, en ôtant le ſecond terme, ſçavoir en ſuppoſant $x \backsim z - \frac{1}{2}d$, pour avoir ce Lieu reduit, $zz \backsim aa + \frac{1}{4}dd - \frac{byy}{c}$, ou $zz \backsim mm - \frac{byy}{c}$, en ſuppoſant $aa + \frac{1}{4}dd \backsim mm$. Si l'on fait dans ce Lieu reduit un raiſonnement ſemblable au precedent, on connoîtra que le demy Diametre de l'Ellipſe eſt m, ou R. $aa + \frac{1}{4}dd$, & que ce Diametre eſt à ſon Parametre comme b à c. D'où l'on tirera aiſément une conſtruction: c'eſt pourquoy je me contenteray de vous donner ſeulement la conſtruction toute faite, & icy les noms de chaque Ligne, qui ſerviront tant pour la conſtruction que pour la démonſtration. Deuxiéme Exemple. 15. Fig.

15. Fig.

AB ∽ x.
BE ∽ y.
AC ∽ $\frac{1}{2}d$.
CF ∽ m ∽ R. $aa + \frac{1}{4}dd$ ∽ CG.
FG ∽ $2m$ ∽ R. $4aa + dd$.
BC ∽ z.
BF ∽ $m + z$.
BG ∽ $m - z$.

Diam. Param. :: b, c. *Param.* ∽ $\frac{2cm}{b}$.

Autre construction.

On peut trouver une autre construction, en reduisant la derniere Equation zz ∽ $mm - \frac{byy}{c}$, en celle-cy, yy ∽ $\frac{cmm}{b} - \frac{czz}{b}$, qui nous fait connoître que le demy Diametre de l'Ellipse est R $\frac{nm}{\quad}$, ou R. $\frac{aa}{b} + \frac{dd}{4b}$, & que le Diametre doit être à son Parametre, comme c à b, & de plus que la partie du Diametre compriſe entre le centre & l'ordonnée doit être y. Ainsi en faisant un raisonnement semblable au precedent, on trouvera aisément une construction. C'est pourquoy pour ne pas dire plusieurs fois la même chose, je me contenteray de vous donner simplement la Figure, & icy les noms de chaque Ligne qui serviront, tant pour la construction, que pour la démonstration.

16. Fig.

AB ∽ y.
BE ∽ x.
AC ∽ $\frac{1}{2}d$.
DE ∽ z.
m ∽ R. $aa + \frac{1}{4}dd$.
CF ∽ R $\frac{cmm}{b}$.
DF ∽ R $\frac{cmm}{b} + y$.
DG ∽ R $\frac{cmm}{b} - y$.

FG ∽ R $\frac{4cmm}{b}$.

Diam. Param. :: *c*, *b*. *Param.* ∽ $\frac{R4bmm}{c}$.

16. Fig.

Troiſiéme Exemple.

Propoſons ce Lieu à l'Ellipſe, $xx - dx \backsim ay - \frac{byy}{c}$. Il le faut premierement reduire à un de même forme que le premier, en ôtant les ſeconds termes, ſçavoir en ſuppoſant $x \backsim z + \frac{1}{2}d$, pour avoir cette autre Equation, $zz - \frac{1}{4}dd \backsim ay - \frac{byy}{c}$, ou $yy - \frac{acy}{b} \backsim \frac{cdd}{4b} - \frac{czz}{4b}$, d'où l'on ôtera encore le ſecond terme, en ſuppoſant $y \backsim \omega + \frac{ac}{2b}$, pour avoir ce Lieu reduit, $zz \backsim \frac{aac}{4b} + \frac{1}{4}dd - \frac{b\omega\omega}{c}$, ou $zz \backsim mm - \frac{b\omega\omega}{c}$, en ſuppoſant $\frac{a}{2b} + \frac{1}{4}dd \backsim mm$. Faiſant dans ce Lieu reduit un raiſonnement ſemblable au precedent, on connoîtra que le demy Diametre de l'Ellipſe eſt *m*, ou R. $\frac{a}{2b} + \frac{1}{4}dd$, & que le Diametre eſt à ſon Parametre, comme *b* à *c*.

Conſtruction. 17. Fig.

C'eſt pourquoy ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indeterminée AB ∽ *x*, de laquelle il faut ôter la Ligne AC ∽ $\frac{1}{2}d$, pour avoir BC ∽ *z*, à cauſe de $x \backsim z + \frac{1}{2}d$: & parce que les quantitez inconnuës *x*, *y*, doivent faire un angle donné, ſuppoſons que de l'extremité B, de la Ligne indefinie AB ∽ *x*, il parte la Ligne indeterminée BE ∽ *y*, en ſorte que l'angle ABE, ſoit égal au donné. Il faut ôter de cette Ligne BE ∽ *y*, la Ligne BH ∽ $\frac{ac}{2b}$, pour avoir EH ∽ ω, à cauſe de $y - \frac{ac}{2b} \backsim \omega$: mais comme le point B, n'eſt pas déterminé, tirez du point fixe A, à la Ligne BE, la parallele AD ∽ $\frac{ac}{2b}$, & par le point D, à la Ligne AB, la parallele DH, car ainſi en quelque Lieu que ſoit la Ligne BE, vous aurez toûjours EH ∽ $y - \frac{ac}{2b}$, ou EH ∽ ω, & DH ∽ *x*. Ainſi les deux quantitez *z*, ω, du Lieu reduit $zz \backsim mm - \frac{b\omega\omega}{c}$, ſeront repreſentées par les deux Lignes BC, EH, & comme

17. Fig. leurs extremitez ne se joignent pas, car elles doivent toûjours faire un angle donné, on tirera par le point C, à la Ligne BE, la parallele CO, & on prendra OH pour z, parce qu'elle est égale à BC. Et parce que par le Lieu reduit $zz \backsim mm - \frac{bxx}{c}$, on connoît que z, ou OH, est la partie du Diametre terminée par le centre & par l'ordonnée, il faut que le Diametre de l'Ellipse soit sur la Ligne DH, & que son centre soit au point O. Si donc on prend sur la Ligne DH, de côté & d'autre les Lignes OF, OG, égales chacune à m, on aura le Diametre FG, à l'entour duquel on décrira une Ellipse, dont le Diametre soit à son Parametre comme b, à c, & dont les ordonnées soient paralleles à la Ligne BE, & cette Ellipse ainsi décrite sera celle qu'on cherche, & la démonstration s'en fera comme auparavant.

Quatriéme Exemple. Proposons ce Lieu à l'Ellipse, $yy - \frac{dxy}{f} \backsim aa - \frac{bxx}{c}$. Il le faut premierement reduire à une autre de même forme que le premier, en ôtant le second terme, sçavoir en supposant $y \backsim z + \frac{fdx}{2ff}$, pour avoir cet autre Lieu sans second terme, $zz \backsim aa - \frac{bxx}{c} + \frac{ddxx}{4ff}$, ou $zz \backsim aa - \frac{4bffxx + cddxx}{4cff}$, ou $zz \backsim aa - \frac{mxx}{n}$, en supposant $-4bff + cdd \backsim -m$, & $4cff \backsim n$.

Construction. Ce Lieu étant ainsi reduit, supposons que du point 18. Fig. fixe A, il parte la Ligne indefinie AB $\backsim x$, & que de son extremité B il parte la Ligne indeterminée BE $\backsim y$, en sorte que l'angle ABE soit donné. Il faut ôter de cette Ligne BE $\backsim y$, la Ligne BH $\backsim \frac{dx}{2f}$, pour avoir EH $\backsim z$, à cause de $y - \frac{dx}{2f} \backsim z$; Mais parce que le point B, n'est pas determiné, prenez la Ligne AC $\backsim zf$, sur la Ligne indefinie AB $\backsim x$, & menez par le point C,

à la

à la Ligne BE, la parallele CD ∽ d, car ainſi menant la droite AD, & la prolongeant juſqu'à ce qu'elle coupe la Ligne BE, en H, en quelque Lieu que ſoit cette Ligne BE, on aura toûjours BH ∽ $\frac{dx}{ff}$, à cauſe des Triangles ſemblables ACD, ABH, & conſequemment EH ∽ z. Et parce que dans le Triangle ACD, on connoît outre les côtez AC, CD, l'angle C, le troiſiéme côté AD ſera auſſi connu, & ſi on le nomme r, on aura AH ∽ $\frac{rx}{ff}$; Ainſi les deux quantitez indeterminées x, z, du Lieu reduit zz ∽ $aa - \frac{mxx}{n}$ ſeront repreſentées par les deux Lignes AB, EH, & parce que leurs extremitez ne ſe joignent pas, on prendra AH pour AB: mais comme AH n'eſt pas égale à AB, ſi l'on change AB en AH, c'eſt-à-dire x en $\frac{rx}{ff}$, on doit auſſi changer le Lieu reduit zz ∽ $aa - \frac{mxx}{n}$, ou $\frac{nzz}{m}$ ∽ $\frac{aan}{m} - xx$, en un autre conforme à la valeur $\frac{rx}{ff}$ de AH, ſçavoir où au lieu du ſimple Quarré xx de la Ligne AB ∽ x, il y ait le Quarré $\frac{rrxx}{4ff}$ de la Ligne AH ∽ $\frac{rx}{2f}$, en le multipliant par le Quarré $\frac{rr}{4ff}$, car ainſi on aura cet autre Lieu reduit, $\frac{nrrzz}{4ffm}$ ∽ $\frac{aanrr}{4ffm} - \frac{rrxx}{4ff}$, qui appartient à une Ellipſe, dont le Diametre eſt à ſon Parametre, comme nrr à $4ffm$, car en reduiſant ce Lieu en proportion, on a cette analogie, nrr, $4ffm$ :: $\frac{aanrr}{4ffm} - \frac{rrxx}{4ff}$, zz, qui fait connoître que R $\frac{rrxx}{4ff}$, ou $\frac{x}{1}$, ou AH eſt la partie du Diametre entre le centre & l'ordonnée; & comme l'ordonnée eſt EH, il faut que le Diametre de l'Ellipſe ſoit ſur la Ligne AH, & que le centre ſoit en A. Aprés quoy le reſte ſera facile à achever, en conſiderant les noms des Lignes que nous avons icy ajoûtez. 18. Fig.

18. Fig.

$AB \backsim x$.
$BE \backsim y$.
$EH \backsim z$.
$AC \backsim 2f$.
$CD \backsim d$.
$AD \backsim r$.
$AH \backsim \frac{rx}{2f}$.
$BH \backsim \frac{dx}{2f}$.
$AF \backsim R\frac{aanrr}{4ffm}$.
$FH \backsim R\frac{aanrr}{4ffm} + \frac{rx}{2f}$.
$GH \backsim R\frac{aanrr}{4ffm} - \frac{rx}{2f}$.
$m \backsim 4bff - cdd$.
$n \backsim 4cff$.

Diam. Param. :: nrr , $4ffm$.

Cinquiéme Exemple. Propoſons ce Lieu à l'Ellipſe , $yy + \frac{dxy}{f} \backsim ax - \frac{bxx}{c}$. Il le faut premierement reduire à un de même forme que le premier , en ôtant le ſecond terme , ſçavoir en ſuppoſant premierement $y \backsim z - \frac{dx}{2f}$, pour avoir cet autre Lieu $zz \backsim ax - \frac{bxx}{c} + \frac{ddxx}{4ff}$, ou $zz \backsim ax + \frac{cddxx - 4bffxx}{4cff}$, ou $zz \backsim ax - \frac{mxx}{n}$, en ſuppoſant $cdd - 4bff \backsim m$, & $4cff \backsim n$, comme auparavant , ou bien encore $xx - \frac{nx}{m} \backsim \frac{nxx}{m}$, & en ſuppoſant derechef $x \backsim \omega + \frac{an}{2m}$, pour avoir ce dernier Lieu reduit , $\omega\omega \backsim \frac{a^2nn}{4mm} - \frac{nxx}{m}$.

Conſtruction. 19. Fig. Ce Lieu êtant ainſi reduit , ſuppoſons que du point fixe A , il parte la Ligne indefinie $AB \backsim x$, & que de ſon extremité B , il parte la Ligne indeterminée $BE \backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit donné. Il faut ajoûter à cette Ligne $BE \backsim y$, la Ligne $BH \backsim \frac{dx}{2f}$, pour avoir $EH \backsim z$, à cauſe de $y + \frac{dx}{2f} \backsim z$. Mais parce que le point B n'eſt pas déterminé , faites $AD \backsim 2f$, & menez par le point D à la Ligne BE, la parallele DO

$\backsim d$, car ainſi menant la droite AO, & la prolongeant juſqu'à ce qu'elle coupe la Ligne BE auſſi prolongée en H, en quelque Lieu que ſoit cette Ligne BE, on aura toûjours BH $\backsim \frac{ix}{il}$, à cauſe des Triangles ſemblables ADO, ABH. Nous avons donc EH $\backsim z$, qui eſt une des quantitez inconnuës du Lieu reduit $\omega\omega \backsim \frac{aann}{4mm} - \frac{nzz}{m}$; & pour trouver l'autre, qui eſt ω, parce que nous avons ſuppoſé $x - \frac{an}{m} \backsim \omega$, il faut ôter de AB $\backsim x$, la Ligne AC $\backsim \frac{an}{im}$, pour avoir CB $\backsim \omega$, & ſi l'on tire par le point C, à la Ligne BE, la parallele CI, & que l'on nomme r la Ligne AO, on aura IH $\backsim \frac{r\omega}{il}$, à cauſe des quarre Lignes proportionnelles, AD, AO, CB, IH. Ainſi les deux quantitez indeterminées z, ω, du Lieu reduit $\omega\omega \backsim \frac{aann}{4mm} - \frac{nzz}{m}$, ſeront repreſentées par les deux Lignes EH, BC: & comme leurs extremitez ne ſe joignent pas, on prendra IH pour BC. Mais comme IH n'eſt pas égale à BC, ſi l'on change BC $\backsim \omega$, en IH $\backsim \frac{r\omega}{il}$, il faut auſſi changer le Lieu reduit $\omega\omega \backsim \frac{aann}{4mm} - \frac{nzz}{m}$, en celuy-cy, $\frac{rr\omega\omega}{4ll} \backsim \frac{aannrr}{16llmm} - \frac{nrrzz}{4llm}$ qui appartient à une Ellipſe, dont le demy Diametre eſt $\frac{anr}{4lm}$, & dont le Diametre eſt à ſon Parametre comme nrr à $4ffm$, car en reduiſant le dernier Lieu reduit $\frac{rr\omega\omega}{4ll} \backsim \frac{aannrr}{16llmm} - \frac{nrrzz}{4llm}$, en proportion, on a cette analogie, nrr, $4ffm :: \frac{aannrr}{16llmm} - \frac{rr\omega\omega}{4ll}$, zz, qui fait connoître que $\frac{r\omega}{il}$, ou IH eſt la partie du Diametre entre le centre & l'ordonnée, & comme l'ordonnée eſt EH, il faut que le Diametre de l'Ellipſe ſoit ſur la Ligne IH, & que le centre ſoit en I, &c.

19. Fig.

Propoſons encore ce Lieu à l'Ellipſe, $yy + gy - \frac{dxy}{f} \backsim aa - \frac{bxx}{f}$. Il le faut premierement reduire en un de même forme que le premier, en ôtant les ſeconds termes,

Sixiéme Exemple.

ſçavoir en ſuppoſant premierement $y \backsim z - \frac{1}{2}g + \frac{dx}{2f}$, pour avoir cet autre Lieu, $zz \backsim \frac{1}{4}gg - \frac{dgx}{2f} + \frac{ddxx}{4ff} + aa - \frac{bxx}{c}$, ou $zz - \frac{1}{2}gg - aa \backsim \frac{cddxx - 4bffx}{4cff} - \frac{dgx}{2f}$, ou $zz - pp \backsim -\frac{mxx}{n} - \frac{dgx}{2f}$, en ſuppoſant $cdd - 4bff \backsim -m$, $4cff \backsim n$, & $\frac{1}{4}gg + aa \backsim pp$, ou bien encore $xx + \frac{dgnx}{2fm} \backsim \frac{npp}{m} - \frac{nzz}{m}$, & en ſuppoſant derechef $x \backsim \omega - \frac{dgx}{4fm}$, pour avoir ce Lieu ſans ſecond terme, $\omega\omega \backsim \frac{ddnngg}{16ffmm} + \frac{npp}{m} - \frac{nzz}{m}$, ou $\omega\omega \backsim qq - \frac{nzz}{m}$, en ſuppoſant $\frac{ddnngg}{16ffmm} + \frac{npp}{m} \backsim qq$.

Conſtruction. 20. Fig. Ce Lieu étant ainſi reduit, ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie AB $\backsim x$, & que de ſon extremité B, il parte la Ligne indeterminée BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit donné. Il faut ajoûter à la Ligne AB $\backsim x$, la Ligne AG $\backsim \frac{dgn}{4fm}$, pour avoir CB $\backsim \omega$, à cauſe de $x \backsim \omega - \frac{dgn}{4fm}$. Il faut auſſi ajoûter à la Ligne BE $\backsim y$, la Ligne BN $\backsim \frac{1}{2}g$, pour avoir EN $\backsim y + \frac{1}{2}g$, & en ôter la Ligne NH $\backsim \frac{dx}{2f}$, pour avoir EH $\backsim z$, à cauſe de $y \backsim z - \frac{1}{2}g + \frac{dx}{2f}$. Mais parce que le point B n'eſt pas déterminé, tirez par le point C à la Ligne BE, la parallele CD $\backsim \frac{1}{2}g$, & par le point D, à la Ligne AB, la parallele DN $\backsim \omega$, pour avoir EN $\backsim y + \frac{1}{2}g$. Tirez encore par le point A à la Ligne BE, la parallele AL $\backsim \frac{1}{2}g$, & ayant fait la Ligne LI $\backsim 2f$, tirez par le point I, à la Ligne BE, la parallele IK $\backsim d$, car ainſi menant la droite LK, & la prolongeant juſqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne EB en H, en quelque Lieu que ſoit cette Ligne EB, on aura toûjours NH $\backsim \frac{dx}{2f}$, & conſequemment EH $\backsim z$. Enfin prolongez la même Ligne LK, juſqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne CD auſſi prolongée en O, par où vous menerez à la Ligne AB la parallele OM $\backsim \omega$. Et parce que le côté LK du Triangle LIK, eſt donné, ſi on

le nomme r, on aura OH $\backsim \frac{re}{2f}$ à cause des Triangles semblables LIK, OMH. Ainsi les deux quantitez indeterminées z, ω, de l'Equation reduite, $\omega\omega \backsim qq - \frac{nzz}{m}$, seront representées par les Lignes EH, OM; & comme leurs extremitez ne se joignent pas, on prendra OH pour OM, ou $\frac{re}{2f}$ pour ω, & $\frac{rr\omega\omega}{4ff} \backsim \frac{qqrr}{4ff} - \frac{nrrzz}{4ffm}$, ou $\frac{nrrzz}{4ffm} \backsim \frac{qqrr}{4ff} - \frac{rr\omega\omega}{4ff}$ pour $\omega\omega \backsim qq - \frac{nzz}{m}$, où l'on void que ce dernier Lieu appartient à une Ellipse, dont le Diametre est à son Parametre, comme nrr à $4ffm$, &c. 20. Fig.

PROBLEME IV.

Construire un Lieu à la Parabole.

Les Lieux qui appartiennent à la Parabole, se peuvent tous reduire à l'une des quatre formules suivantes.

$$y\bar{y} \backsim ax$$
$$yy \backsim ax + bb.$$
$$yy \backsim ax - bb.$$
$$yy \backsim bb - ax.$$

Premiere Equation. 21. Fig.

Pour construire le Lieu de la premiere Equation, $yy \backsim ax$, supposons que du point fixe A, il parte la Ligne indeterminée AB $\backsim x$, & que de son extremité B il parte la Ligne indefinie BE $\backsim y$, en sorte que l'angle ABE soit donné. Puisque le Quarré yy de la Ligne BE $\backsim y$, est égal au Rectangle ax, on la doit considerer comme l'ordonnée dans une Parabole, & la Ligne AB $\backsim x$, comme la partie du Diametre comprise entre le sommet & l'ordonnée. D'où il suit que le Diametre de cette Parabole est sur la Ligne AB, & que le sommet est en A, & de plus que le Parametre est a.

Construction. 21. Fig. Si donc on décrit sur le Diametre AD, une Parabole, dont le Parametre AC $\backsim a$, & dont les ordonnées soient paralleles à la Ligne BE, cette Parabole ainsi décrite sera le Lieu de l'Equation proposée $yy \backsim ax$.

Demonstration. Car si on prend sur la circonference de cette Parabole un point à volonté, comme E, & qu'on en tire sur le Diametre AD, l'ordonnée BE; comme nous avons fait AC $\backsim a$, si l'on suppose AB $\backsim x$, & BE $\backsim y$, parce que le Rectangle CAB est égal au Quarré de l'ordonnée EB, par la nature de la Parabole, on aura cette Equation, $yy \backsim ax$, qui est la même que la proposée.

Deuxiéme Equation. 21. Fig. Pour construire le Lieu de la seconde Equation, $yy \backsim ax + bb$, supposons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie AB $\backsim x$, & que de son extremité B, il parte la Ligne indeterminée BE $\backsim y$, en sorte que l'angle ABE soit donné. Puisque le Quarré yy de la Ligne BE $\backsim y$, est égal au Rectangle $ax + bb$, dont les côtez sont a, $x + \frac{bb}{a}$, on la doit considerer comme l'ordonnée dans une Parabole, & le côté $x + \frac{bb}{a}$ comme la partie du Diametre entre le sommet & l'ordonnée, & par consequent l'autre côté a comme le Parametre. Mais pour avoir la partie $x + \frac{bb}{a}$, il faut ajoûter à la Ligne AB $\backsim x$, la Ligne AC $\backsim \frac{bb}{a}$.

Troisiéme Equation. 23 Fig. Pour construire le Lieu de la troisiéme Equation, $yy \backsim ax - bb$, on fera une construction semblable à la precedente, excepté qu'au lieu de prendre AC $\backsim \frac{bb}{a}$, sur la Ligne AB, prolongée vers A, il la faut prendre sur la même Ligne AB, depuis A vers B, pour avoir BC $\backsim x - \frac{bb}{a}$, à cause de $yy \backsim ax - bb$.

Pour conſtruire le Lieu de la quatriéme Equation, $yy \backsim bb - ax$, on fera une conſtruction tout-à-fait ſemblable à la precedente, mais il faut concevoir AC plus grande que AB, à cauſe de $yy \backsim bb - ax$. Quatriéme Equation. 24. Fig.

Nous avons dit que tous les Lieux à la Parabole peuvent être reduits à l'une des quatre formules precedentes, & pour vous le faire voir, nous ajoûterons icy les exemples ſuivans.

Propoſons ce Lieu à la Parabole, $yy + ay \backsim bx - \frac{1}{4}aa$. Il en faut premierement ôter le ſecond terme, en ſuppoſant $y \backsim z - \frac{1}{2}a$, pour avoir cet autre Lieu ſans ſecond terme, $zz \backsim bx$, qui eſt de même forme que le premier des quatre precedens. Premier Exemple.

C'eſt pourquoy ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie AB $\backsim x$, & que de ſon extremité B, il parte la Ligne indeterminée BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE, ſoit donné. Il faut ajoûter à la Ligne BE $\backsim y$, la Ligne BD $\backsim \frac{1}{2}a$, pour avoir DE $\backsim z$, à cauſe de $y - \backsim z - \frac{1}{2}a$: mais comme le point B, n'eſt pas déterminé, tirez du point fixe A, à la Ligne BE, la parallele AC $\backsim \frac{1}{2}a$, & du point C, à la Ligne AB, la parallele CD, car ainſi en quelque Lieu que ſoit la Ligne BE, on aura toûjours ED $\backsim z$: & comme ſon Quarré zz eſt égal au Rectangle bx, on connoît aiſément qu'il faut décrire par le point C, ſur le Diametre CD, une Parabole, dont le Parametre CF $\backsim b$, & dont les ordonnées ſoient paralleles à la Ligne BE, & cette Parabole ainſi décrite ſera le Lieu qu'on cherche. Conſtruction. 25. Fig.

Propoſons ce Lieu à la Parabole, $yy - ay \backsim bx + cc$. Il en faut premierement ôter le ſecond terme, en ſup- Deuxiéme Exemple.

posant $y \backsim z + \frac{1}{2}a$, pour avoir cet autre Lieu sans second terme, $zz \backsim bx + cc + \frac{1}{4}aa$, qui est de même forme que le second des quatre precedens, duquel par consequent on tirera aisément une construction, sur tout en regardant les noms de chaque Ligne, qui sont icy écris par ordre. 16. Fig.

$$AB \backsim x.$$
$$BE \backsim y.$$
$$DE \backsim z.$$
$$AC \backsim \frac{1}{2}a.$$
$$CF \backsim b.$$
$$CG \backsim \frac{cc}{b} + \frac{aa}{4b}.$$

Troisiéme Exemple. Proposons ce Lieu à la Parabole, $\bar{yy} - a\bar{y} \backsim bx + \frac{1}{4}a\bar{a}$. Il en faut premierement ôter le second terme, en supposant $y \backsim z + \frac{1}{2}a$, pour avoir cet autre Lieu sans second terme, $zz \backsim bx - \frac{1}{4}aa$, qui est de même forme que le troisiéme des quatre precedens, duquel par consequent il sera aisé de tirer une construction, en considerant la valeur de chaque Ligne, que nous avons icy marquée par ordre. 17. Fig.

$$AB \backsim x.$$
$$BE \backsim y.$$
$$DE \backsim z.$$
$$AC \backsim \frac{1}{2}a.$$
$$CF \backsim b.$$
$$CG \backsim \frac{aa}{4b}:$$

Quatriéme Exemple. Proposons ce Lieu à la Parabole, $yy - ay \backsim cc - bx$. Il en faut premierement ôter le second terme en supposant $y \backsim z + \frac{1}{2}a$, pour avoir cet autre Lieu sans second terme, $zz \backsim -\frac{1}{4}aa + cc - bx$, qui est de même forme que le dernier des quatre precedens, duquel par

par conſequent on tirera aiſément une conſtruction, par la valeur des Lignes, que vous voyez icy. 28. Fig.

$AB \backsim x$.
$BE \backsim y$.
$DE \backsim z$.
$AC \backsim \frac{1}{2}a$.
$FG \backsim b$.
$CF \backsim \frac{aa}{4b} \dagger \frac{cc}{b}$.

Propoſons ce Lieu à la Parabole, $yy - \frac{2xy}{b} \backsim cx - \frac{2cxx}{2bb}$. Il en faut premierement ôter le ſecond terme, en ſuppoſant $y \backsim z \dagger \frac{aa}{2b}$, pour avoir cet autre Lieu ſans ſecond terme, $zz \backsim cx$, qui eſt ſemblable à la premiere des quatre formules precedentes. Cinquiéme Exemple.

C'eſt pourquoy ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie $AB \backsim x$, & que de ſon extremité B, il parte la Ligne indeterminée $BE \backsim y$, en ſorte que l'angle ABE, ſoit donné. Il faut ôter de la Ligne $BE \backsim y$, la Ligne $BC \backsim \frac{aa}{2b}$, pour avoir $EC \backsim z$, à cauſe de $y \backsim z \dagger \frac{aa}{2b}$: mais comme le point B, n'eſt pas déterminé, faites $AD \backsim 2b$, & par le point D, tirez à la Ligne BE, la parallele $DF \backsim a$, car menant la droite AF, & la prolongeant juſqu'à ce qu'elle rencontre en C, la Ligne BE, en quelque Lieu que ſoit cette Ligne BE, on aura toûjours $BC \backsim \frac{aa}{2b}$, & conſequemment $EC \backsim z$, à cauſe des Triangles ſemblables ABC, ADF. Et parce que dans le Triangle ADF, on connoît les deux côtez AD, DF, & l'angle compris ADF, le troiſiéme AF, ſera auſſi connu, & ſi on le nomme r, on trouvera $AC \backsim \frac{rx}{2b}$; Ainſi les deux quantitez indeterminées x, z, du Lieu reduit $zz \backsim cx$, ſeront repreſentées par les deux Lignes AB, CE, & Conſtruction. 29. Fig.

29. Fig. comme leurs extremitez ne se joignent pas, on prendra AC pour AB, ou $\frac{rx}{2b}$ pour x. Or comme le Quarré de CE, ou zz, est la premiere partie du Lieu reduit $zz \backsim cx$, on connoît quelle est l'ordonnée dans la Parabole qu'on cherche, dont le Parametre seroit c, si la partie du Diametre entre le sommet & l'ordonnée étoit x, mais comme elle est $\frac{rx}{2b}$, ou AC, au lieu de c pour Parametre, on aura $\frac{2bc}{r}$, qu'on trouvera en divisant c par $\frac{r}{2b}$. Si donc on décrit par le point A, sur le Diametre AC, une Parabole, dont le Parametre AG $\backsim \frac{2bc}{r}$, & dont les ordonnées soient paralleles à la Ligne BE, cette Parabole ainsi décrite sera le Lieu qu'on cherche.

Demonstration. Car si l'on prend sur la circonference de cette Parabole un point à volonté, comme E, & qu'on en tire sur le Diametre AC, l'ordonnée CE: comme nous avons fait AD $\backsim 2b$, DF $\backsim a$, AF $\backsim r$, & le Parametre AG $\backsim \frac{2bc}{r}$, si l'on suppose AB $\backsim x$, & BE $\backsim y$, on aura AC $\backsim \frac{rx}{2b}$, BC $\backsim \frac{ax}{2b}$, & CE $\backsim y - \frac{ax}{2b}$, dont le Quarré étant égal au Rectangle GAC, par la nature de la Parabole, on aura cette Equation, $yy - \frac{axr}{2b} + \frac{aaxx}{4bb} \backsim cx$, ou $yy - \frac{axv}{b} \backsim cx - \frac{aaxx}{4bb}$, qui est la même que la proposée.

La raison pourquoy il faut diviser c par $\frac{r}{2b}$, pour avoir le Parametre de la Parabole, est telle. Puisque le Rectangle GAC, ou $\frac{rxo}{2b}$, en supposant le Parametre AG $\backsim o$, est égal au Quarré zz de l'ordonnée EC $\backsim z$, & que ce même Quarré zz est égal au Rectangle cx, on aura cette Equation, $\frac{rxo}{2b} \backsim cx$, dans laquelle on trouvera $o \backsim \frac{2bc}{r}$, pour le Parametre AG.

Sixiéme Exemple. Proposons encore ce Lieu à la Parabole, $yy + \frac{axy}{b} +$

$dy \backsim cc - \frac{aaxx}{4bb}$. Il en faut premierement ôter le second terme, en ſuppoſant $y \backsim z - \frac{ax}{2b} - \frac{1}{2}d$, pour avoir cet autre Lieu ſans ſecond terme, $zz \backsim cc + \frac{1}{4}dd + \frac{adx}{2b}$, & ſi l'on ſuppoſe $cc + \frac{1}{4}dd \backsim ff$, & $\frac{ad}{2b} \backsim m$, on aura cet autre Lieu, $zz \backsim ff + mx$, qui eſt ſemblable à la ſeconde des quatre formules precedentes.

C'eſt pourquoy ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie AB $\backsim x$, & de ſon extremité B, la Ligne indeterminée BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit donné. Il faut ajoûter à la Ligne BE $\backsim y$, la Ligne BD $\backsim \frac{1}{2}d$, & la Ligne DH $\backsim \frac{ax}{2b}$ pour avoir EH $\backsim z$, à cauſe de $y \backsim z - \frac{ax}{2b} - \frac{1}{2}d$. Mais comme le point B n'eſt pas déterminé, tirez par le point A à la Ligne BE, la parallele AC $\backsim \frac{1}{2}d$, & par le point C, à la Ligne AB, la Parallele CF $\backsim 2b$. Enfin tirez du point F à la Ligne BE, la parallele FG $\backsim a$, car menant la droite CG, & la prolongeant juſqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne BE, auſſi prolongée en H, en quelque Lieu que ſoit cette Ligne BE, on aura toûjours DH $\backsim \frac{ax}{2b}$, à cauſe des Triangles ſemblables CFG, CDH, & conſequemment EH $\backsim z$, dont le Quarré zz étant égal au Rectangle $ff + mx$, dont les côtez ſont m, $\frac{ff}{m} + x$, on connoît que le Parametre doit être m, & que la partie du Diametre entre le ſommet & l'ordonnée devroit être $\frac{ff}{m} + x$, qu'on trouvera en ajoûtant à la Ligne AB $\backsim x$, la Ligne AI $\backsim \frac{ff}{m}$, pour avoir BI $\backsim \frac{ff}{m} + x$, qui ne peut pas être cette partie interceptée, parce que la Ligne BE n'eſt pas l'ordonnée, ou z, car c'eſt EH. Il faut donc que cette partie interceptée ſoit ſur la Ligne CH, afin qu'elle ſoit correſpondante à l'ordonnée EH : mais comme

Conſtruction. 30. Fig.

30. Fig. elle doit auſſi avoir un raport avec la Ligne BI, on tirera du point I, à l'ordonnée EH, la parallele IK, laquelle rencontrant la Ligne CH, prolongée en K, donnera le point K, pour le ſommet de la Parabole, & KH, pour la partie du Diametre entre le ſommet & l'ordonnée. Il n'y a donc plus qu'à déterminer la longueur du Parametre, & la valeur de la partie KH, ce que nous ferons ainſi.

Puiſque dans le Triangle CFG, on connoît les deux côtez CF, FG, & l'angle compris CFG, le troiſiéme côté CG ſera auſſi connu, & ſi on le nomme r, on trouvera CH $\backsim \frac{rx}{2b}$, & CK $\backsim \frac{ffr}{2bm}$, & conſequemment KH $\backsim \frac{ffr}{2bm} + \frac{rx}{2b}$, pour la partie interceptée. Or ſi cette partie interceptée êtoit $\frac{n}{m} + x$, ou BI, le Parametre ſeroit m, comme vous avez vû. C'eſt pourquoy le Parametre doit changer, & pour le trouver, on le nommera ω, & parce que le Rectangle ſous le Parametre KL, & la partie interceptée KH, ſçavoir $\frac{ffr\omega}{2bm} + \frac{rx\omega}{2b}$, eſt égal au Quarré zz, de l'ordonnée EH $\backsim z$, & que ce même Quarré zz eſt égal à $ff + mx$, on aura cette Equation, $\frac{ffr\omega}{2bm} + \frac{rx\omega}{2b} \backsim ff + mx$, dans laquelle on trouvera $\frac{2bm}{r} \backsim \omega$, pour le Parametre KL. Si donc on décrit par le point K, ſur le Diametre KH, une Parabole, dont le Parametre KL $\backsim \frac{2bm}{r}$, & dont les ordonnées ſoient paralleles à la Ligne EH, cette Parabole ainſi décrite ſera le Lieu qu'on cherche.

PROBLEME V.

Construire un Lieu à l'Hyperbole entre ses Asymptotes.

Les Equations qui donnent des Lieux à l'Hyperbole entre ses Asymptotes, se peuvent toutes reduire à une de même forme que la suivante, $xy \backsim ab$, dont la construction est telle.

Construction. 31. Fig.

Supposons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie AB $\backsim x$, & de son extremité B, la Ligne indeterminée BE $\backsim y$, en sorte que l'angle ABE soit donné. Tirez du point fixe A, à la Ligne BE, la parallele AC égale à l'une des deux quantitez connuës a, b, du Rectangle ab, comme à la premiere a, & par le point C, à la Ligne AB, la parallele CD, égale à l'autre quantité connuë b; Aprés cela décrivez du centre A, par le point D, entre les Asymptotes AB, AC, une Hyperbole, qui sera le Lieu qu'on cherche.

Demonstration.

Car si on prend sur la circonference de cette Hyperbole un point à volonté, comme E, & que l'on en tire à l'une des Asymptotes AB, AC, comme à AC, la parallele EB; comme nous avons fait AC $\backsim a$, & CD $\backsim b$, si l'on suppose AB $\backsim x$, & BE $\backsim y$, on considerera que puisque le Rectangle ACD est égal au Rectangle ABE, par la nature des Asymptotes, on aura cette Equation, $ab \backsim xy$, qui est la même que la proposée.

Pour vous faire voir que toutes les Equations à l'Hyperbole entre ses Asymptotes se peuvent reduire

à une de même forme que la precedente, nous ajoûterons icy les Exemples ſuivans.

Premier Exemple. Propoſons donc premierement ce Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, $ab \backsim \frac{cxy}{d} + my$. On diviſera en premier lieu, l'Equation propoſée par $\frac{c}{x}$, pour avoir cette autre Equation, $\frac{abd}{c} \backsim xy + \frac{dmy}{c}$, où le Rectangle xy des deux lettres inconnuës ſe trouve reduit à l'unité, ce qui doit toûjours être ainſi, autrement le Lieu propoſé ſeroit mal reſolu. Suppoſez $x + \frac{dm}{c} \backsim z$, pour avoir cet autre Lieu, $\frac{abd}{c} \backsim yz$, & ſi vous ſuppoſez $\frac{abd}{c} \backsim nd$, on aura ce dernier Lieu $nd \backsim yz$, qui eſt de même forme que le precedent.

Conſtruction. 32. Fig. C'eſt pourquoy ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indeterminée AB $\backsim x$, & de ſon extremité B, la Ligne indefinie BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit donné. Il faut ajoûter à la Ligne AB $\backsim x$, la Ligne AC $\backsim \frac{dm}{c}$, pour avoir BC $\backsim z$, à cauſe de $x + \frac{dm}{c} \backsim z$. Tirez par le point C à la Ligne BE, la parallele CD $\backsim x$, & par le point D, à la Ligne BC, la parallele DF $\backsim d$, & décrivez du centre C, par le point F, entre les Aſymptotes CB, CD, une Hyperbole, qui ſera le Lieu qu'on cherche, & la démonſtration s'en fera comme auparavant.

Deuxiéme Exemple. Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, $ab \backsim \frac{cxy}{d} - my$. Diviſez-le par $\frac{c}{d}$, pour avoir cet autre Lieu, $\frac{abd}{c} \backsim xy - \frac{dmy}{c}$, dans lequel ſuppoſant $x - \frac{dm}{c} \backsim z$, il viendra cet autre Lieu $\frac{abd}{c} \backsim yz$, & ſi l'on ſuppoſe $\frac{abd}{c} \backsim dn$, on aura ce dernier Lieu reduit $dn \backsim yz$, qui étant de même forme que le precedent, on en tirera aiſément une conſtruction, par les noms de chaque Ligne, qui ſont icy marquez.

g.

AB ∽ x. 33. Fig.
BE ∽ y.
BC ∽ z.
AC ∽ $\frac{dm}{c}$.
DF ∽ d.
CD ∽ n.

Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, $ab \backsim my - \frac{cxy}{a}$, ou $\frac{abd}{c} \backsim \frac{dmy}{c} - xy$. Suppoſez $\frac{dm}{c} - x \backsim z$, ou $\frac{abd}{c} \backsim dn$, pour avoir cet autre Lieu reduit $dn \backsim yz$, d'où l'on tirera aiſément une conſtruction à l'imitation de la precedente, en conſiderant les noms de chaque Ligne, qui ſont icy marquez. Troiſiéme Exemple. 34. Fig.

AB ∽ x.
BE ∽ y.
BC ∽ z.
AC ∽ $\frac{dm}{c}$.
DF ∽ d.
CD ∽ n.

Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, $ax \backsim xy - by$. Suppoſez premierement $x - b \backsim z$, pour avoir cet autre Lieu, $yz - az \backsim ab$. Suppoſez encore $y - a \backsim \omega$, pour avoir ce dernier Lieu reduit, $ab \backsim z\omega$, duquel on tirera aiſément une conſtruction, par les noms de chaque Ligne, qui ſont icy marquez. Quatriéme Exemple. 35. Fig.

AB ∽ x.
BE ∽ y.
BC ∽ z.
EF ∽ ω.
AC ∽ b ∽ DG.
GH ∽ a ∽ CD.

35. Fig.

CG $\backsim a \dagger b$.

BF $\backsim a$.

Cinquiéme Exemple. Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, $ax \backsim xy \dagger by$. Suppoſez premierement $x \dagger b \backsim z$, pour avoir cet autre Lieu, $az - ab \backsim yz$, ou $ab \backsim az - yz$. Suppoſez encore $a - y \backsim \omega$, pour avoir ce dernier Lieu reduit, $ab \backsim z\omega$, duquel on tirera aiſé-

36. Fig. ment une conſtruction, par la valeur de chaque Ligne, que nous avons icy ajoûtée.

AB $\backsim x$.

BE $\backsim y$.

BC $\backsim z$.

EF $\backsim \omega$.

CD $\backsim a$.

AC $\backsim b$.

DF $\backsim b \dagger x$.

BC $\backsim b \dagger x$.

Sixiéme Exemple. Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, $ax \backsim by - xy$. Suppoſez premierement $b - x \backsim z$, pour avoir cet autre Lieu, $ab \backsim az \dagger yz$. Suppoſez encore $a \dagger y \backsim \omega$, pour avoir ce dernier Lieu reduit,

37. Fig. $ab \backsim z\omega$, duquel on tirera aiſément une conſtruction, par les noms de chaque Ligne, qui ont été icy marquez.

AB $\backsim x$.

BE $\backsim y$.

BC $\backsim z$.

EF $\backsim \omega$.

AC $\backsim b \backsim$ DG.

GH $\backsim a \backsim$ CD.

CG $\backsim b - a$.

DF $\backsim z$.

Propoſons

Septiéme Exemple.

Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, $ab - xx \backsim xy + cy$. Suppoſez premierement $x + c \backsim z$, ou $x \backsim z - c$, pour avoir cet autre Lieu, $ab - cc \backsim zz - 2cz + yz$. Suppoſez encore $z - 2c + y \backsim \omega$, pour avoir ce dernier Lieu reduit, $ab - cc \backsim z\omega$, ou $dd \backsim z\omega$, en ſuppoſant $ab - cc \backsim dd$.

Conſtruction. 38. Fig.

Pour la conſtruction, ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie AB $\backsim x$, & de ſon extremité B, la Ligne indeterminée BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit donné. Il faut ajoûter à la Ligne AB $\backsim x$, la Ligne AC $\backsim c$, pour avoir BC $\backsim z$, à cauſe de $x + c \backsim z$. Il faut auſſi ajoûter à la Ligne BE $\backsim y$, la Ligne BG $\backsim z - 2c$, pour avoir EG $\backsim \omega$, à cauſe de $z - 2c + y \backsim \omega$: mais comme le point B n'eſt pas déterminé, faites CF $\backsim 2c$, & tirez par le point C, à la Ligne BE, la parallele CD $\backsim 2c$, car menant la droite DF, & la prolongeant juſqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne BE, auſſi prolongée en G, en quelque Lieu que ſoit cette Ligne BE, on aura toûjours BG $\backsim z - 2c$, à cauſe des deux Triangles iſoſceles ſemblables CFD, BFG, & par conſequent EG $\backsim \omega$. Ainſi les deux quantitez indeterminées z, ω, du Lieu reduit $dd \backsim z\omega$, ſeront repreſentées par les deux Lignes CB, EG, & comme leurs extremitez ne ſe joignent pas, à la place de BC $\backsim z$, on prendra ſon égale & parallele EK: & parce que le Rectangle KEG, ou $z\omega$, eſt égal au Rectangle dd, dont les côtez ſont d, d, on tirera du point D, à la Ligne KE, la parallele DH $\backsim d$, & on décrira du centre D, par le point H, entre les Aſymptotes DL, DG, une Hyperbole qui ſera le Lieu qu'on cherche.

Demonſtration. 38. Fig. Car ſi l'on prend ſur la circonference de cette Hyperbole un point à diſcretion, comme E, & que l'on tire à l'une des Aſymptotes, la parallele BE & par le point H, la parallele HI; comme nous avons fait AC ∽ c, CD ∽ $2c$, CF ∽ $2c$, & DH ∽ d ∽ HI, ſi l'on ſuppoſe AB ∽ x, & BE ∽ y, on aura CR ou KE ∽ $x+c$, & BF ou BG ∽ $x-c$, & par conſequent EG ∽ $x-c+y$, & parceque le Rectangle KEG eſt égal au Rectangle DHI, par la proprieté des Aſymptotes, on aura cette Equation, $xx+cy+xy-cc \backsim ab-cc$, ou $ab-xx \backsim xy+cy$, qui eſt la même que la propoſée.

Huitiéme Exemple. Propoſons encore ce Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, $ax-xx \backsim ab-xy-cy$. Suppoſez premierement $x+c \backsim z$, ou $x \backsim z-c$, pour avoir cet autre Lieu, $az-ac-zz+2cz-cc \backsim ab-yz$, ou $ab+ac+cc \backsim az-zz+2cz+yz$. Suppoſez encore $a-z+2c+y \backsim \omega$, pour avoir ce dernier Lieu reduit, $ab+ac+cc \backsim z\omega$, ou $dd \backsim z\omega$, en ſuppoſant $ab+ac+cc \backsim dd$. D'où l'on tirera aiſément une conſtruction à l'imitation de la 39. Fig. precedente. C'eſt pourquoy je me contenteray de vous donner icy les noms de chaque Ligne.

AB ∽ x.
BE ∽ y.
BC ∽ z.
EG ∽ ω.
AC ∽ c.
DH ∽ d.
CD ∽ $2c+a$ ∽ CF.
BG ∽ $2c+a-z$.
KE ∽ $x+c$.
BG ∽ $a+c-x$.

$EG \backsim a \dagger c - x \dagger y.$ 39. Fig.

$d \backsim R. ab \dagger ac \dagger cc.$

Les Equations de ces deux derniers exemples appartiennent auſſi à une Hyperbole par ſon Parametre, comme vous allez voir dans le Probleme ſuivant.

PROBLEME VI.

Conſtruire un Lieu à l'Hyperbole par ſon Parametre,

Les Lieux à l'Hyperbole par ſon Parametre ſe peuvent tous reduire à l'une des deux formules ſuivantes.

$$xx - aa \backsim yy.$$

$$xx - aa \backsim \frac{byy}{c}.$$

Pour conſtruire le Lieu de la premiere Equation, $xx - aa \backsim yy$, lequel eſt une Hyperbole Equilatere, comme vous allez voir, ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indeterminée AB $\backsim x$, & de ſon extremité B, la Ligne indefinie BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit donné. Puiſque le Quarré yy de la Ligne BE $\backsim y$, eſt égal au Rectangle $xx - aa$, dont les côtez ſont $x \dagger a$, $x - a$, on doit conſiderer cette Ligne BE comme une ordonnée dans l'Hyperbole, & les côtez $x \dagger a$, $x - a$, doivent être ſur le Diametre de la même Hyperbole. Ainſi on doit conſiderer la Ligne AB $\backsim x$, comme une partie de ce Diametre prolongé autant qu'il en ſera beſoin, & à cauſe des côtez $x \dagger a$, $x - a$, on luy doit ajoûter d'une part la Ligne AD $\backsim a$, & de l'autre côté en ôter la Ligne AC $\backsim a$, pour avoir DB $\backsim x \dagger a$, & BC $\backsim x - a$, dont le Rectangle DBC, ou $xx - aa$, eſtant égal au Quarré

Premiere Equation.

40. Fig.

40. Fig. yy de la Ligne BE $\backsim y$, on connoît que CD ou $2a$ eſt le Diametre déterminé d'une Hyperbole Equilatere, & que par conſequent le point A en eſt le centre, & C le ſommet.

Si donc on décrit du centre A, par le point C, une Hyperbole, dont le Diametre détermine CD $\backsim 2a$, ſoit égal à ſon Parametre, & dont les ordonnées ſoient paralleles à la Ligne BE, cette Hyperbole ainſi décrite ſera le Lieu de l'Equation propoſée $xx-aa \backsim yy$.

Demonſtration. Car ſi on prend ſur la circonference de cette Hyperbole un point à volonté, comme E, & qu'on en tire ſur le diametre CB, l'ordonnée BE; comme nous avons fait AC $\backsim a$, & AD $\backsim a$, ſi l'on ſuppoſe AB $\backsim x$, & BE $\backsim y$, on aura DB $\backsim x+a$, & BC $\backsim x-a$, & parce que le Rectangle DBC, eſt égal au Quarré de l'ordonnée BE, par la nature de l'Hyperbole Equilatere, on aura cette Equation, $xx-aa \backsim yy$, qui eſt la même que la propoſée.

Deuxiéme Equation. Pour conſtruire le Lieu de la ſeconde Equation, $xx-aa \backsim \frac{byy}{c}$, on en tirera premierement cette analogie, $b, c :: xx-aa, yy$, qui fait connoître, que ce Lieu eſt à une Hyperbole Scalene, dont le Diametre déterminé eſt à ſon Parametre, comme b, à c, aprés quoy on trouvera aiſément une conſtruction à l'imitation de la

41. Fig. precedente, en conſiderant les noms de chaque Ligne, qui ſont icy marquez.

AB $\backsim x$.
BE $\backsim y$.
AC $\backsim a$.
CD $\backsim 2a$.

BD ∽ $x + a$.

BC ∽ $x - a$.

Diam. Param. :: b , c.

$2a$. $\frac{2ac}{b}$.

41. Fig.

Pour vous faire voir que toutes les Equations qui donnent des Lieux à l'Hyperbole par ſon Parametre, ſe peuvent reduire à l'une des deux precedentes, nous ajoûterons icy les Exemples ſuivans.

Premier Exemple.

Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole par ſon Parametre , $xx + ax \backsim yy$. Il en faut premierement ôter le ſecond terme, en ſuppoſant $x \backsim z - \frac{1}{2}a$, pour avoir cette autre Equation ſans ſecond terme, $zz - \frac{1}{4}aa \backsim yy$, qui eſt de même forme que la premiere des deux precedentes.

Conſtruction. 42. Fig.

C'eſt pourquoy ſuppoſons que du point fixe A , il parte la Ligne indefinie AB ∽ x , & de ſon extremité B, la Ligne indeterminée BE ∽ y , en ſorte que l'angle ABE, ſoit donné. Il faut ajoûter à la Ligne AB ∽ x , la Ligne AC ∽ $\frac{1}{2}a$, pour avoir CB ∽ z, à cauſe de $x + \frac{1}{2}a \backsim z$: & parce que dans le Lieu reduit , $zz - \frac{1}{4}aa \backsim yy$, le Quarré yy de la Ligne BE ∽ y , eſt égal au Rectangle $zz - \frac{1}{4}aa$, dont les côtez ſont $z + \frac{1}{2}a$, $z - \frac{1}{2}a$, dont $z - \frac{1}{2}a$, eſt repreſenté par la Ligne AB ∽ x , on aura l'autre côté $z + \frac{1}{2}a$, en ajoûtant à la Ligne BC ∽ z, la Ligne CD ∽ $\frac{1}{2}a$, aprés quoy le reſte ſera facile à achever..

Deuxiéme Exemple.

Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole par ſon Parametre , $xx - ax \backsim yy$. Il en faut premierement ôter le ſecond terme, en ſuppoſant $x \backsim z + \frac{1}{2}a$, pour avoir cet autre Lieu ſans ſecond terme , $zz - \frac{1}{4}aa \backsim yy$, qui eſt de même forme que la premiere des deux formules

precedentes. C'eſt pourquoy on en tirera aiſément
43. Fig. une conſtruction, en conſiderant les noms de chaque Ligne, qui ſont icy marquez.

$AB \backsim x.$
$BE \backsim y.$
$BC \backsim z.$
$AC \backsim \frac{1}{2}a \backsim CD.$
$BC \backsim x - \frac{1}{2}a.$
$BD \backsim x - a.$
$Diam. \backsim Param.$
$a \qquad a$

Troiſiéme Exemple. Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole par ſon Parametre, $xx - ax \backsim \frac{byy}{c}$. Il en faut premierement ôter le
44. Fig. ſecond terme, en ſuppoſant $x \backsim z + \frac{1}{2}a$, pour avoir cet autre Lieu ſans ſecond terme, $zz - \frac{1}{4}aa \backsim \frac{byy}{c}$, qui eſt ſemblable à la derniere des deux formules precedentes, ce qui fait connoître que le Lieu propoſé $xx - ax \backsim \frac{byy}{c}$, eſt à une Hyperbole, dont le Diametre déterminé eſt à ſon Parametre comme b à c, à cauſe de la fraction $\frac{byy}{c}$. Aprés quoy la conſtruction ſera tout-à-fait la même que la precedente.

Quatriéme Exemple. Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole par ſon Parametre, $xx + ax \backsim \frac{byy}{c}$. Il en faut premierement ôter le ſecond terme, en ſuppoſant $x \backsim z - \frac{1}{2}a$, pour avoir cet autre Lieu ſans ſecond terme, $zz - \frac{1}{4}aa \backsim \frac{byy}{c}$, qui étant ſemblable à la derniere des deux formules precedentes, fait connoître que le Lieu propoſé $xx + ax \backsim \frac{byy}{c}$, eſt à une Hyperbole, dont le Diametre
45. Fig. eſt à ſon Parametre comme b à c, aprés quoy la conſtruction ſera tout-à-fait la même que celle du premier Exemple.

Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole par ſon Parametre, $xx + ax \backsim yy + by$. Il en faut premierement ôter les ſeconds termes, en ſuppoſant $x \backsim z - a$, & $y \backsim \omega - \frac{1}{2}b$, pour avoir cet autre Lieu ſans ſecond terme, $zz + \frac{bb-aa}{4} \backsim \omega\omega$, ou $zz - \frac{1}{4}dd \backsim \omega\omega$, en ſuppoſant $bb - aa \backsim -dd$. D'où nous avons tiré cette conſtruction. Cinquiéme Exemple. 45. Fig.

Suppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie AB $\backsim x$, & de ſon extremité B, la Ligne indeterminée BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit donné. Il faut ajoûter à la Ligne AB $\backsim x$, la Ligne AC $\backsim \frac{1}{2}a$, pour avoir BC $\backsim z$, à cauſe de $x \backsim z - \frac{1}{2}a$. Mais il faut ajoûter à la Ligne BE $\backsim y$, la Ligne BF $\backsim \frac{1}{2}b$, pour avoir EF $\backsim \omega$, à cauſe de $y \backsim \omega - \frac{1}{2}b$. Mais comme le point B n'eſt pas déterminé, tirez du point C, à la Ligne BE, la parallele CD $\backsim \frac{1}{2}b$, & du point D, à la Ligne AB, la Parallele DF $\backsim z$, car ainſi vous aurez EF $\backsim \omega$. Ainſi les deux quantitez indeterminées z, ω, du Lieu reduit $zz - \frac{1}{4}dd \backsim \omega\omega$, ſeront repreſentées par les deux Lignes DF, EF: aprés quoy le reſte ſera facile à achever. Conſtruction. 46. Fig.

Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole par ſon Parametre, $xx - ax \backsim yy - by$. Si on ôte les ſeconds termes, en ſuppoſant $x \backsim z + \frac{1}{2}a$, & $y \backsim \omega + \frac{1}{2}b$, on trouvera aiſément une conſtruction à l'imitation de la precedente, & il ne faut que regarder la Figure pour la comprendre. Sixiéme Exemple. 48. Fig.

Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole, $ab - xx \backsim xy + cy$, ou $xx + xy \backsim ab - cy$, qui eſt le même que celuy que nous avons propoſé au ſeptiéme Exemple du Probleme precedent. Il en faut premierement ôter le ſecond terme, en ſuppoſant $x \backsim z - \frac{1}{2}y$, pour avoir cet autre Septiéme Exemple.

48. Fig. Lieu, $zz - \frac{1}{4}yy \backsim ab - cy$, ou $yy - 4cy \backsim 4zz - 4ab$, d'où il faut encore ôter le second terme, en supposant $y \backsim \omega + 2c$, pour avoir ce dernier Lieu, $\omega\omega - 4cc + 4ab \backsim 4zz$, ou $\omega\omega - dd \backsim 4zz$, en supposant $4ab - 4cc \backsim -dd$.

Construction. 47. Fig. Pour la construction, supposez que du point fixe A, il parte la Ligne indeterminée AB $\backsim y$, & de son extremité B, la Ligne indefinie BE $\backsim x$, en sorte que l'angle ABE soit donné. Il faut ajoûter à la Ligne BE $\backsim x$, la Ligne BF $\backsim \frac{1}{2}y$, pour avoir EF $\backsim z$, à cause de $x \backsim z - \frac{1}{2}y$: mais comme le point B n'est pas déterminé, prolongez comme vous voudrez la Ligne AB en C, & tirez par le point C, à la Ligne BE, la parallele CD, égale à la moitié de AC, car menant la droite AD, & la prolongeant jusqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne BE, aussi prolongée en F, on aura BF $\backsim y$, à cause des Triangles semblables ACD, ABF, & consequemment EF $\backsim z$. Il faut encore ôter de la Ligne AB $\backsim y$, la Ligne AG $\backsim 2c$, pour avoir GB $\backsim \omega$, à cause de $y \backsim \omega + 2c$. Ainsi les deux quantitez indeterminées z, ω, du Lieu reduit $\omega\omega - dd \backsim 4zz$, seront representées par les deux Lignes EF, GB: mais comme leurs extremitez ne se joignent pas, on tirera du point G, à la Ligne BE, la parallele GH, & on prendra FH, pour GB, c'est-à-dire $\frac{n\omega}{m}$ pour ω; car si l'on suppose AC $\backsim m$, & AD $\backsim n$, on trouvera HF $\backsim \frac{n\omega}{m}$. Puisque donc on change ω en $\frac{n\omega}{m}$, il faut aussi changer le Lieu reduit $\omega\omega - dd \backsim 4zz$, en celuy-cy, $\frac{nn\omega\omega}{mm} - \frac{ddnn}{mm} \backsim \frac{4nnzz}{mm}$ d'où l'on tire cette analogie, $4nn$, $mm :: \frac{nn\omega\omega - ddnn}{mm}$, zz, qui fait connoître que le Lieu proposé $ab - xx \backsim xy + cy$, est à une Hyperbole, dont le Diametre

metre eſt à ſon Parametre, comme $4nn$ à mm; Aprés quoy le reſte s'achevera facilement, en regardant les noms de chaque Ligne, que nons avons icy ajoûtez. 47. Fig.

AB ∽ y.
BE ∽ x.
EF ∽ z.
BG ∽ ω.
AC ∽ m.
CD ∽ $\frac{1}{2}m$.
EF ∽ $\frac{1}{2}y$.
AG ∽ $2c$.
AD ∽ n.
HF ∽ $\frac{n\omega}{m}$.
HI ∽ $\frac{dn}{m}$ ∽ HK.
KI ∽ $\frac{2dn}{m}$.

Diam. Param. :: $4nn$, mm.
$\frac{2dn}{m}$. $\frac{dm}{2n}$.

Nous avons ſuppoſé $4cc$ plus grand que $4ab$, & s'il avoit été moindre, le Lieu reduit ſeroit tel, $\omega\omega + dd$ ∽ $4zz$, ou $4zz - dd$ ∽ $\omega\omega$, dont la conſtruction eſt ſemblable à la precedente, excepté que le Diametre de l'Hyperbole eſt ſur la Ligne GH, & que le Diametre traverſant eſt à ſon Parametre, comme mm à $4nn$, car ſi on multiplie le Lieu reduit $4zz - dd$ ∽ $\omega\omega$, par $\frac{nn}{mm}$, comme il a été fait auparavant, on aura cet autre Lieu, $\frac{4nnzz}{mm} - \frac{ddnn}{mm}$ ∽ $\frac{nn\omega\omega}{mm}$, d'où l'on tire cette analogie mm, $4nn$ :: $zz - \frac{1}{4}dd$, $\frac{nn\omega\omega}{mm}$, qui fait connoître que le Diametre eſt à ſon Parametre, comme mm à $4nn$, & que le demy Diametre eſt R $\frac{1}{4}dd$, ou $\frac{1}{2}d$, & enfin que R $\frac{nn\omega\omega}{mm}$, ou $\frac{n\omega}{m}$, ou EM eſt une ordonnée dans l'Hyperbole, &c. Voyez les noms de chaque Ligne. 49. Fig.

49. Fig.

AB ∽ y.
BE ∽ x.
EF ∽ z.
BG ∽ ω.
AC ∽ m.
CD ∽ $\frac{1}{2}m$.
BF ∽ $\frac{1}{1}y$.
AG ∽ $2c$.
AD ∽ n.
KM ∽ $z + \frac{1}{2}d$.
IM ∽ $z - \frac{1}{2}d$.
HI ∽ $\frac{1}{2}d$ ∽ HK.

Diam. Param. :: mm , $4nn$.
d. $\frac{4dnn}{mm}$.

Huitiéme Exemple.

Propoſons encore ce Lieu à l'Hyperbole , $ax - xx \backsim ab - xy - cy$, ou $xx - ax - xy \backsim cy - ab$, qui eſt la même que celle que nous avons propoſée au huitiéme Exemple du Probleme precedent. Il en faut premierement ôter le ſecond terme , en ſuppoſant $x \backsim z + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}y$, pour avoir cet autre Lieu, $zz - \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{4}yy \backsim cy - ab$, ou $yy + 2ay + 4cy \backsim 4ab - aa + 4zz$, d'où il faut encore ôter le ſecond terme , en ſuppoſant $y \backsim \omega - a - 2c$, pour avoir ce dernier Lieu , $\omega\omega - 4ab - 4ac - 4cc \backsim 4zz$, ou $\omega\omega - dd \backsim 4zz$, en ſuppoſant $4ab + 4ac + 4cc \backsim dd$.

Conſtruction. 50. Fig.

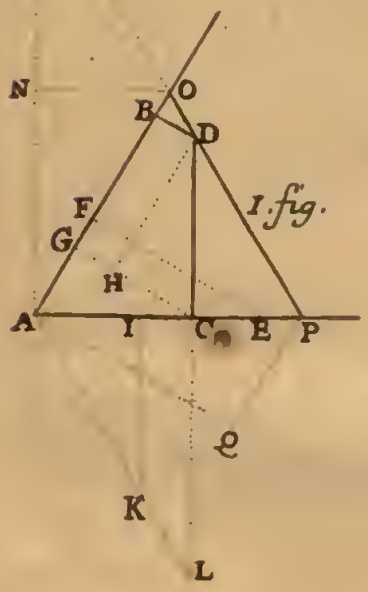
Pour la conſtruction , ſuppoſez que du point fixe A , il parte la Ligne indeterminée AB ∽ y, & de ſon extremité B , la Ligne indefinie BE ∽ x, en ſorte que l'angle ABE ſoit donné. Il faut ôter de la Ligne BE ∽ x, la Ligne BH ∽ $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}y$, pour avoir EH ∽ z , à cauſe de $x \backsim z + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}y$: Mais comme le point B , n'eſt

pas déterminé, tirez du point A, à la Ligne BE, la parallele AC ∽ $\frac{1}{2}a$, & du point C, à la Ligne AB, la parallele CD, qui donnera BD ∽ $\frac{1}{2}a$; & pour avoir DH ∽ $\frac{1}{2}y$, prenez sur CD, une Ligne quelconque CF ∽ m, & tirez par le point F, à la Ligne BE, la parallele FG ∽ $\frac{1}{2}m$, car menant la droite CG, & la prolongeant jusqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne BE, en H, vous aurez DH ∽ $\frac{1}{2}y$, à cause des Triangles semblables CFG, CDH, & par consequent DH ∽ $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}y$, & EH ∽ z. Il faut ajoûter à la Ligne AB, ou CD ∽ y, la Ligne CI ∽ $a + 2c$, pour avoir ID ∽ ω, à cause de $y \backsim \omega - a - 2c$. Ainsi les deux quantitez indeterminées z, ω, du Lieu reduit $\omega\omega - dd \backsim zz$, seront representées par les deux Lignes, EH, ID; & comme leurs extremitez ne se joignent pas, on tirera du point I, à la Ligne BE, la parallele IK, qui rencontrera la Ligne CH, au point K, qui sera le centre de l'Hyperbole, parce que l'on doit changer la Ligne ID ∽ ω en la Ligne KH ∽ $\frac{n\omega}{m}$, & par consequent le Lieu reduit $\omega\omega - dd \backsim zz$, en celuy-cy $\frac{nn\omega\omega}{mm} - \frac{ddnn}{mm} \backsim \frac{nnzz}{mm}$, & achever le reste comme dans l'Exemple precedent. 50. Fig.

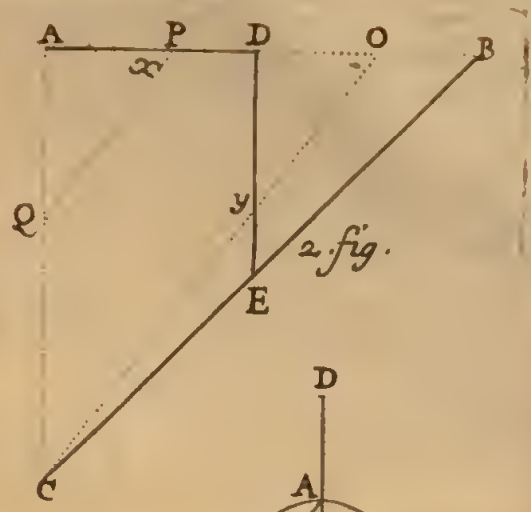
FIN.

603369
609371

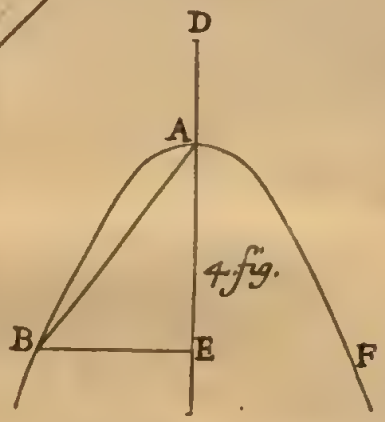
M *Li. Geom. p. 8.*



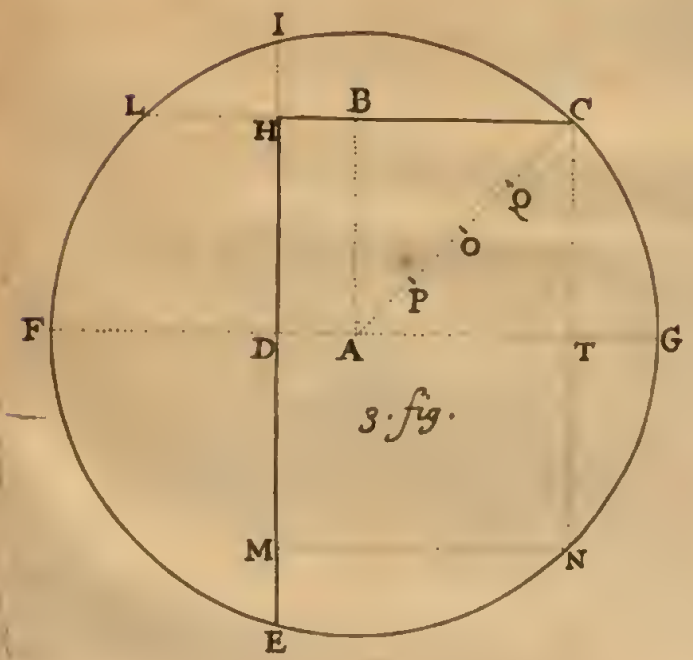
1. fig.



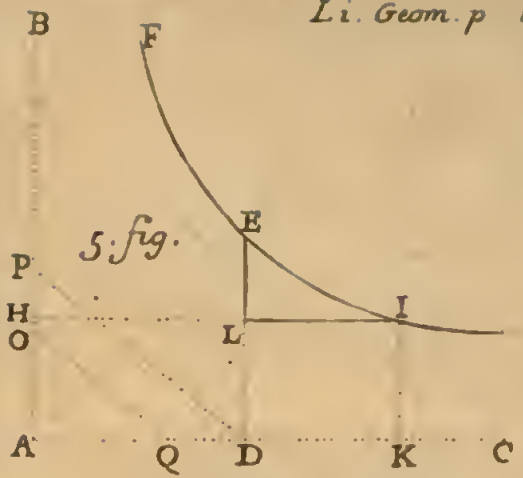
2. fig.



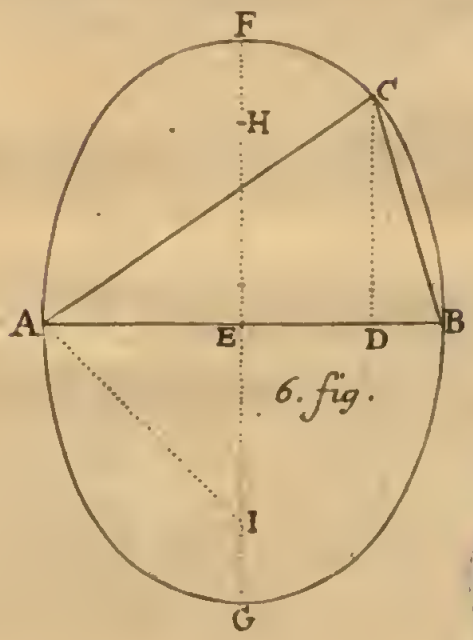
4. fig.



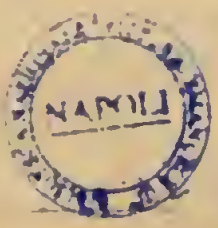
3. fig.



5. fig.

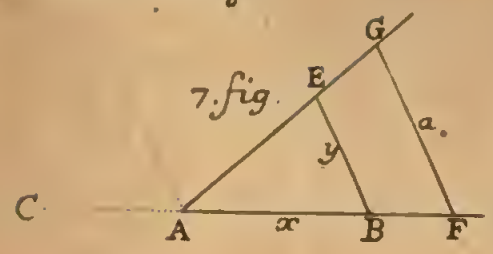


6. fig.



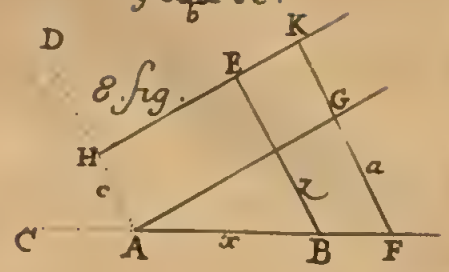
D $y \backsim \frac{a}{b} x$.

7. fig.



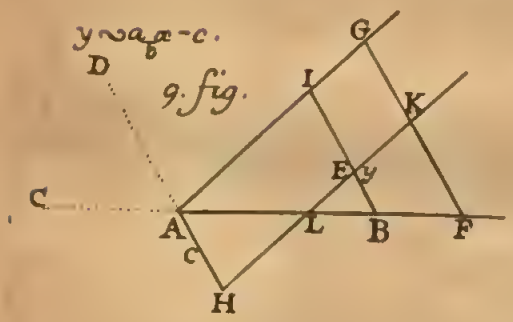
$y \backsim \frac{a}{b} x \pm c$.

8. fig.



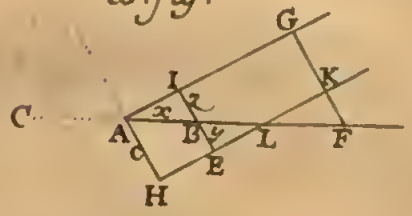
$y \backsim \frac{a}{b} x - c$.

9. fig.



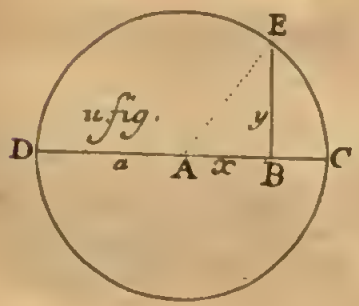
$y \backsim c - \frac{a}{b} x$.

10. fig.



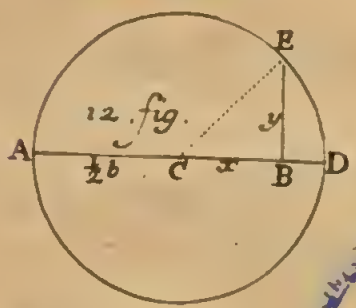
$yy \backsim aa - xx$.

11. fig.



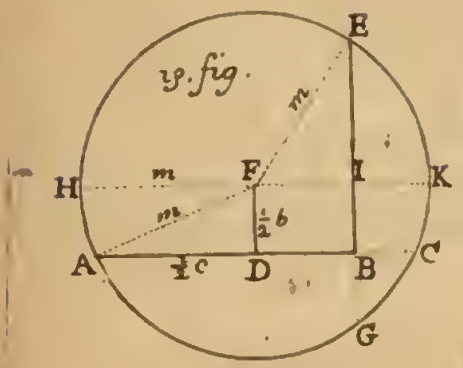
$yy \backsim bx - xx$.

12. fig.

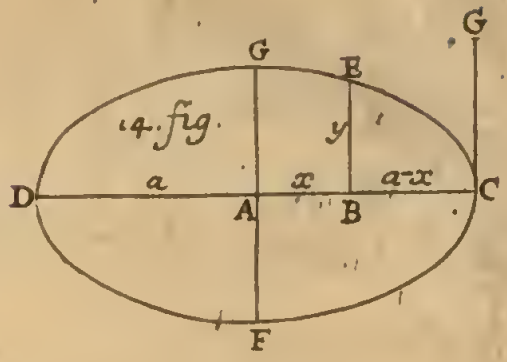


NAPOLI

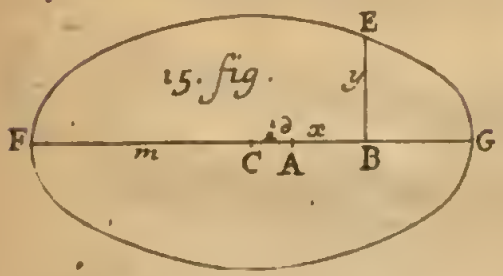
$yy - by \sim xx - xx$



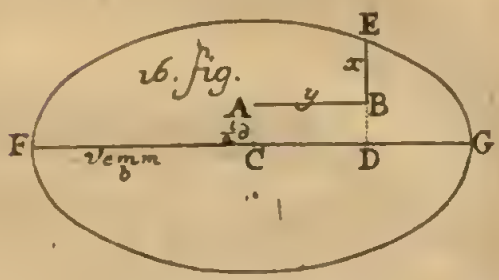
$xx \sim aa - \frac{byy}{c}$



$xx + dx \sim aa - \frac{byy}{c}$

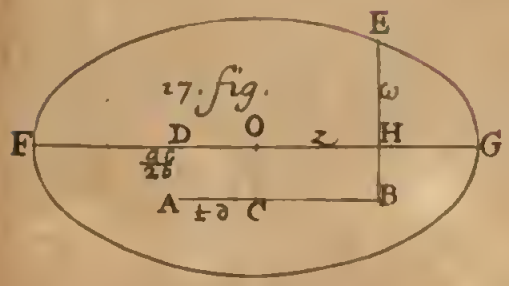


$xx + ax \sim aa \frac{byy}{c}$

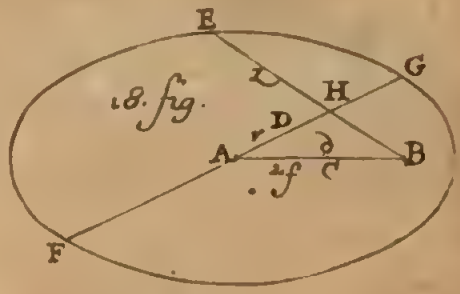


Li Geom. p. 32.

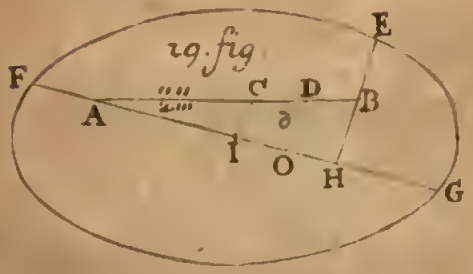
$xx - \partial x \backsim a y - \frac{b y y}{c}$



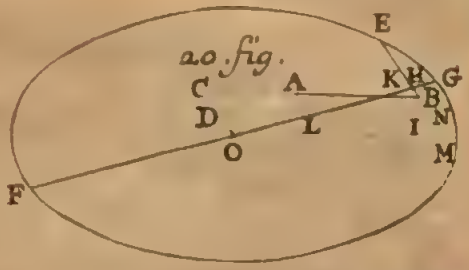
$yy - \frac{\partial x y}{f} \backsim a a - \frac{b x x}{c}$



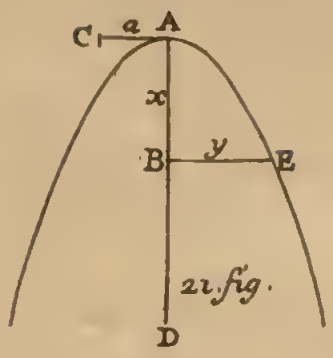
$yy + \partial x y \backsim a x - \frac{b x x}{c}$



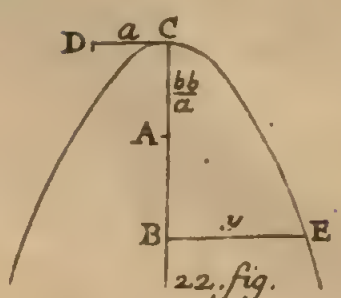
$yy + gy - \frac{\partial x y}{f} \backsim a a - \frac{b x x}{c}$



$yy \backsim ax$ Li. Geom. p. 38. $yy \backsim ax + bb$.

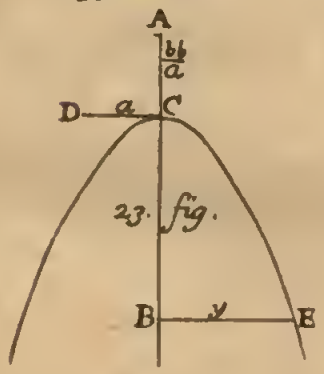


21. fig.



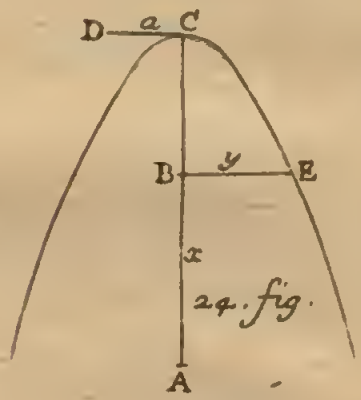
22. fig.

$yy \backsim ax - bb$.



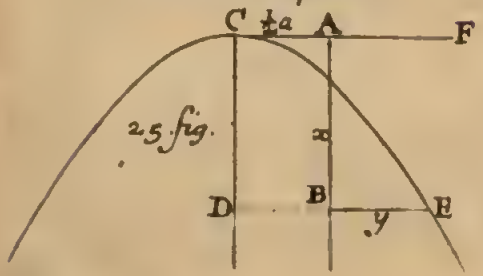
23. fig.

$yy \backsim bb - ax$.



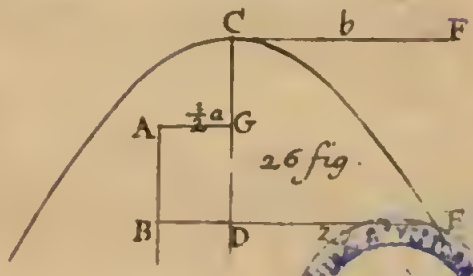
24. fig.

$yy + ay \backsim bx - \frac{1}{4}aa$.



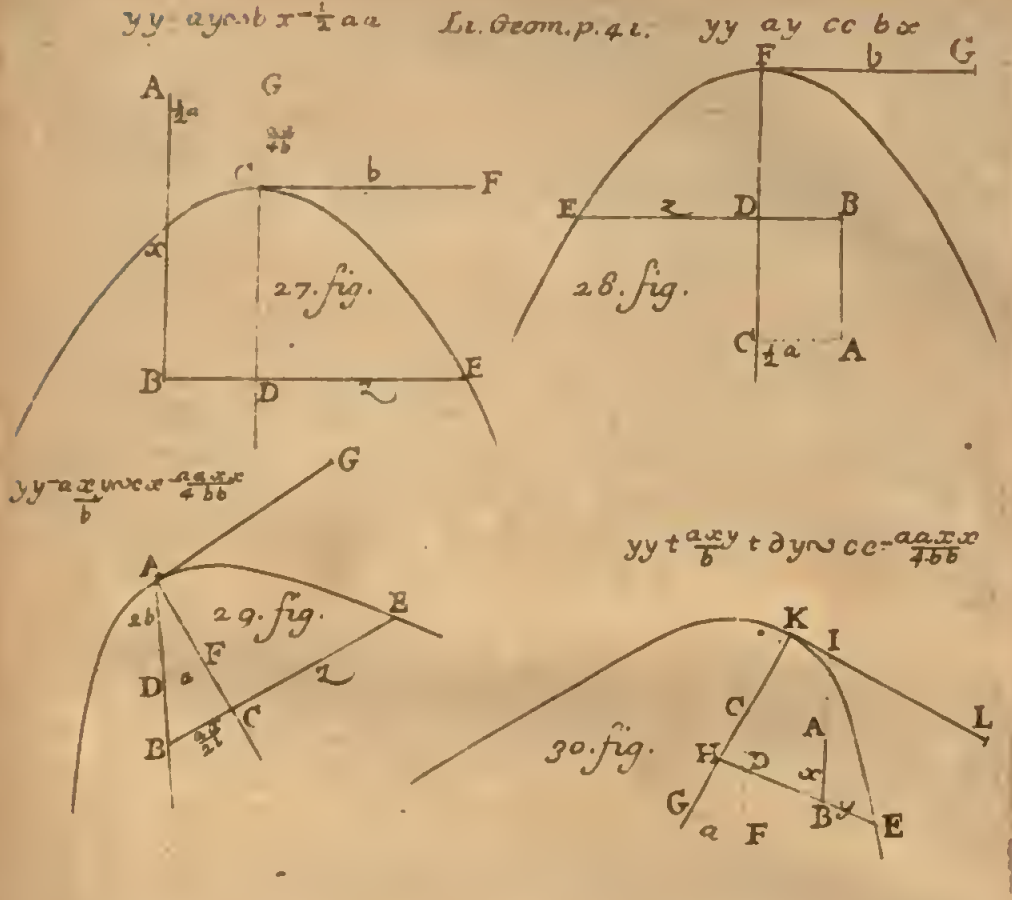
25. fig.

$yy - ay \backsim bx + cc$.



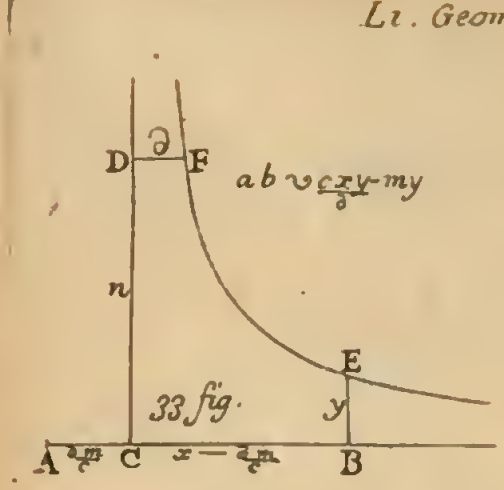
26 fig.

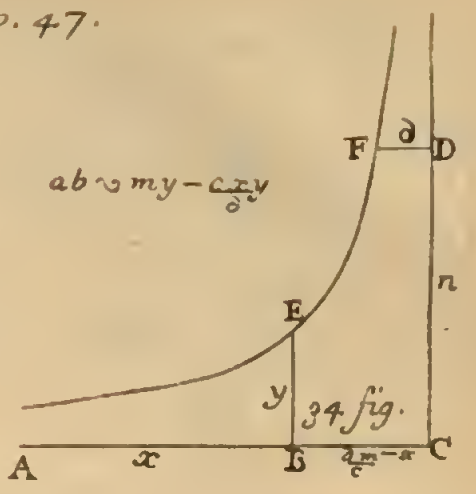
NAPOLI

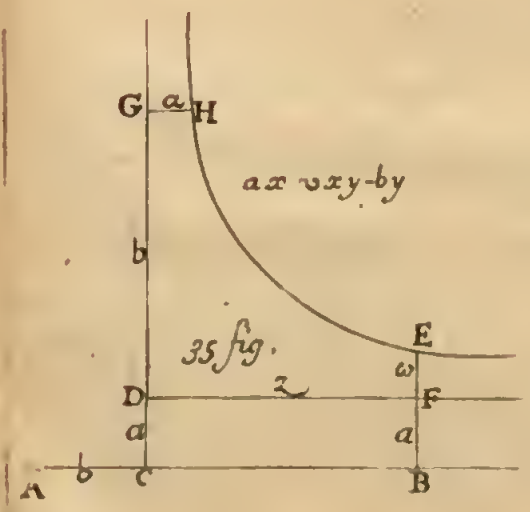

yy - ayz - bx + ½aa
Li. Geom. p. 41.
yy ay cc bx
27. fig.
28. fig.
yy - ax/b mx + aax/4bb
29. fig.
yy + axy/b + dy ∽ cc - aaxx/4bb
30. fig.
xy ∽ ab
31. fig.
ab ∽ fx/g y + my
32. fig.

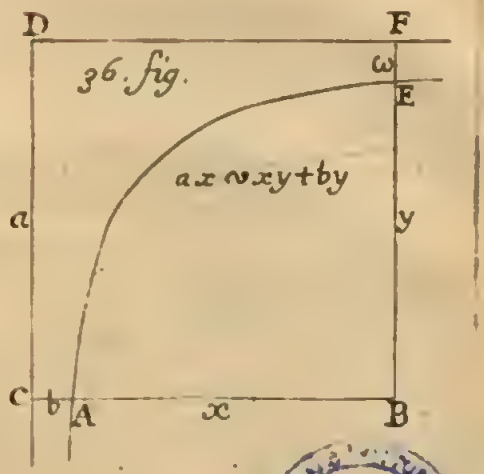
NAPOLI

Li. Geom. p. 47.

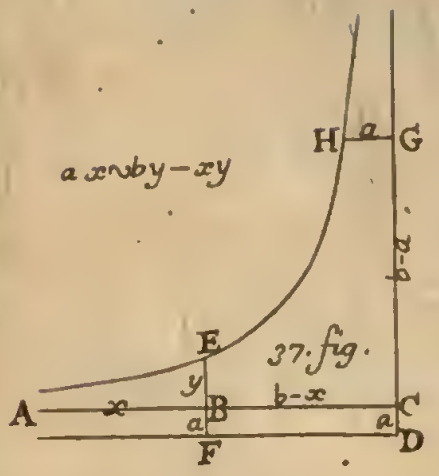

D
∂
F
$ab \backsim \frac{cxy}{\partial} - my$
n
E
y
33 fig.
A
C
B

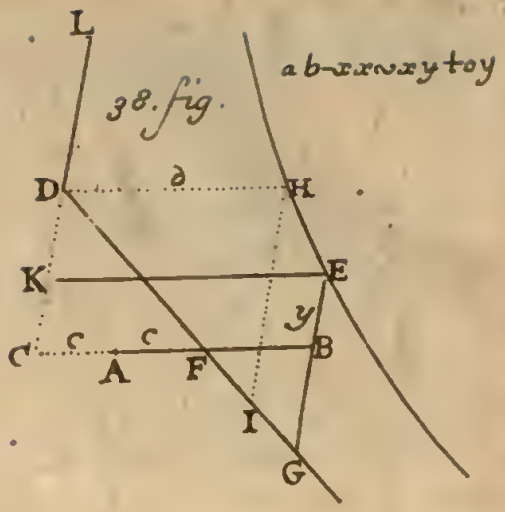

F
∂
D
$ab \backsim my - \frac{cxy}{\partial}$
n
E
y
34 fig.
A
x
B
C

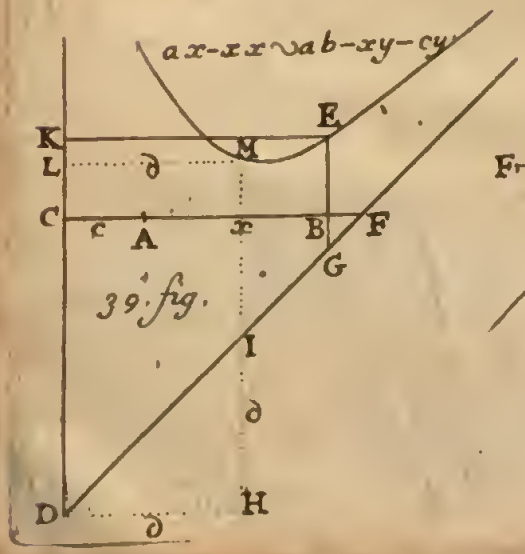

G
a
H
$ax \backsim xy - by$
b
E
35 fig.
ω
z
D
F
a
a
A
b
c
B

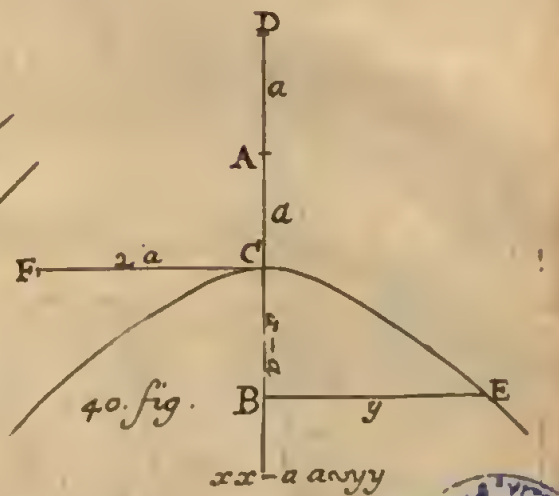

D
F
36. fig.
ω
E
$ax \backsim xy + by$
a
y
C
b
A
x
B

NANCY


a xx ∿ by − xy
H
a
G
b − x
E
y
37. fig.
A
x
B
b − x
C
a
a
F
D


L
a b − xx ∿ xy + oy
38. fig.
D
∂
H
K
E
y
c
c
C
A
F
B
I
G


a x − xx ∿ ab − xy − cy
E
K
M
L
∂
C
c
A
x
B
F
G
39. fig.
I
∂
H
D
∂

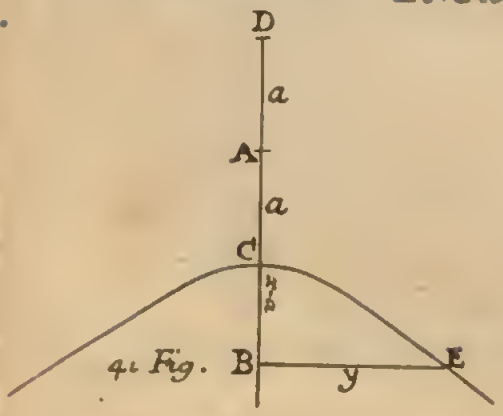

D
a
A
a
F
2 a
C
b − y
B
y
E
40. fig.
xx − a a ∿ yy

NAPOLI

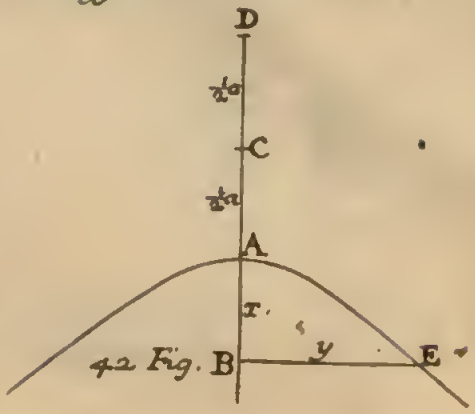
$xx - aa \sim \frac{byy}{c}$.

$xx + ax \sim yy$.

Li. Geom. p. 53.

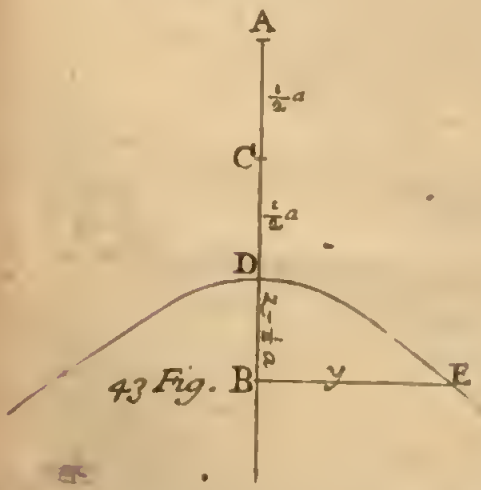


41 Fig.



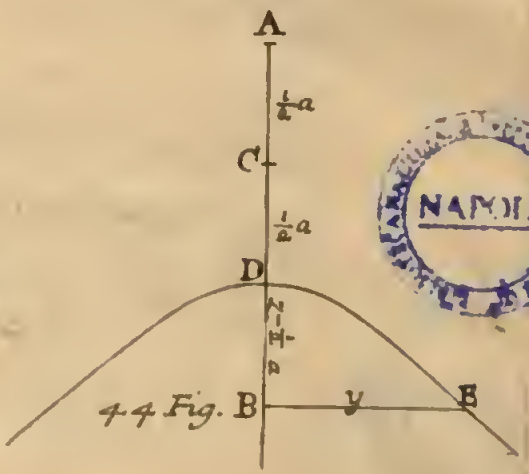
42 Fig.

$xx - ax \sim yy$.



43 Fig.

$xx - ax \sim \frac{byy}{c}$.

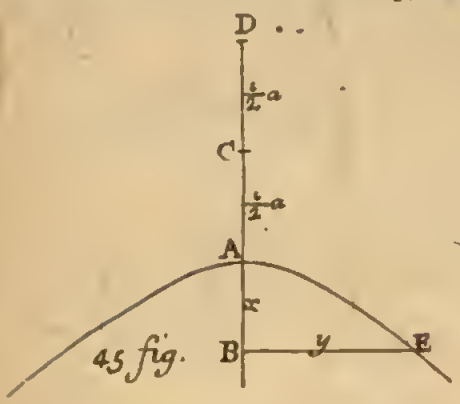


44 Fig.

NAPOLI

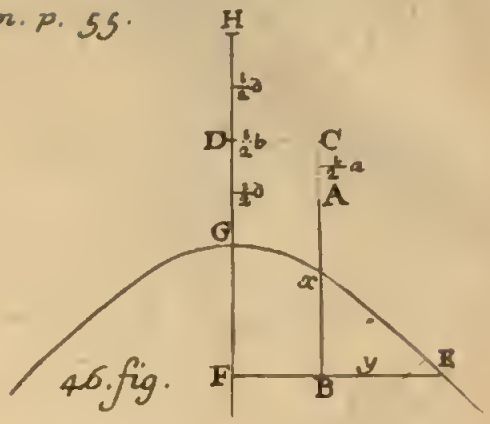
$xx \pm ax \sim \frac{by^2}{c}$.

Li. Geom. p. 55.



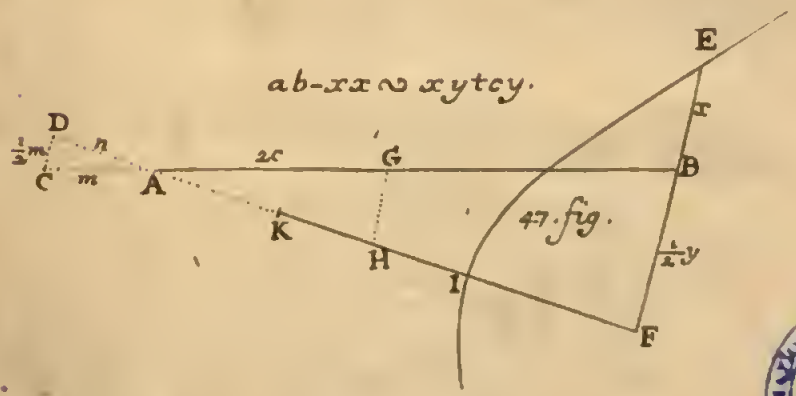
45 fig.

$xx \pm ax \sim yy \pm by$.



46. fig.

$ab - xx \sim xy \pm cy$.

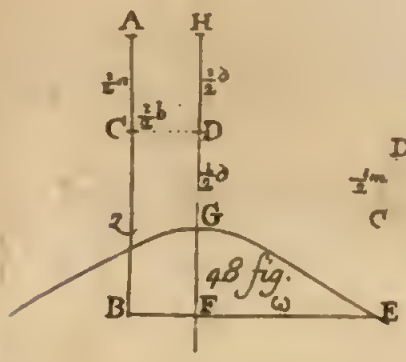


47. fig.

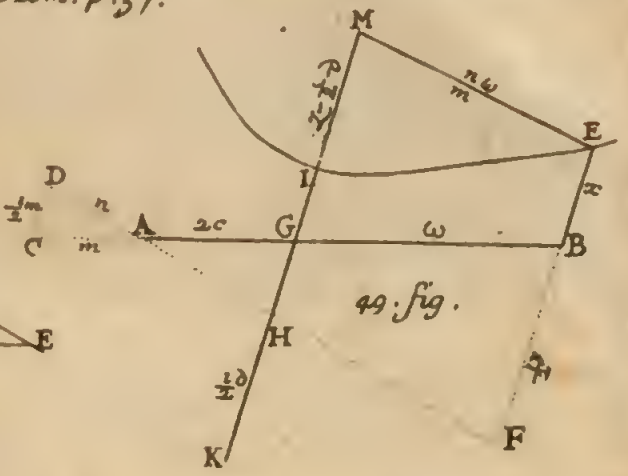
NAPOLI

$xx-ax\backsim yy-by$ $ab-xx\backsim xy+cy$

Li. Geom. p. 57.

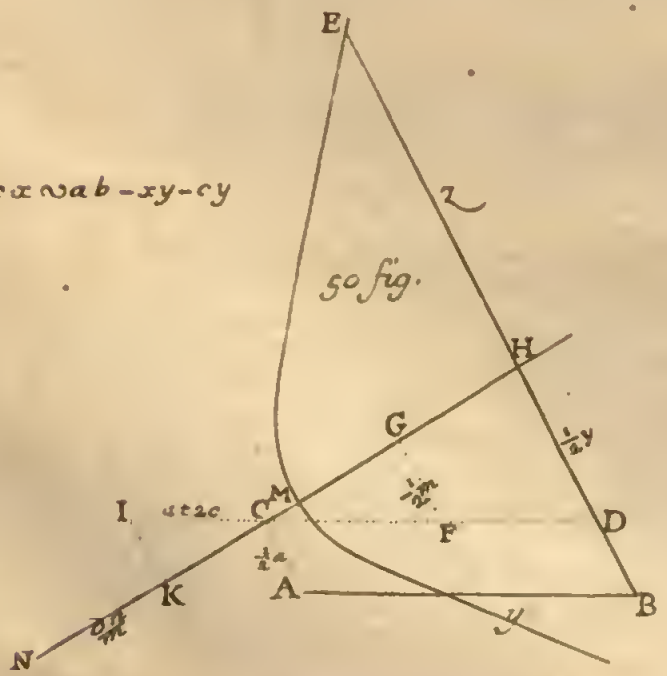


48 fig.



49. fig.

$ax-xx\backsim ab-xy-cy$



50 fig.